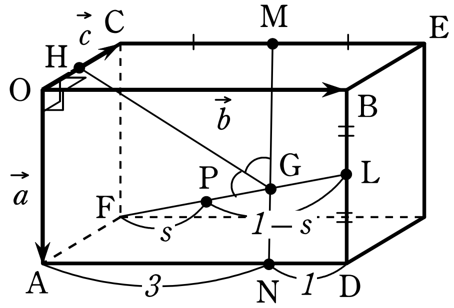
数学Ⅱ・B 第 4 問

(1) M は線分 CE の中点であるから



$$\overrightarrow{\mathrm{OM}}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{\mathrm{OC}}+\overrightarrow{\mathrm{OE}})$$

$$=\frac{1}{2}\{\vec{c}+(\vec{b}+\vec{c})\}$$

$$=\frac{1}{{}^{ア}2}\vec{b}+\vec{c}$$

N は線分 AD を 3 : 1 に内分する点であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{ON}}=\frac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}+3\overrightarrow{\mathrm{OD}}}{3+1}=\frac{1}{4}\{\vec{a}+3(\vec{a}+\vec{b})\}=\vec{a}+\frac{{}^{イ}3}{{}^{ウ}4}\vec{b}$$

参考 右上の図のように，7 点 O，A，B，C，D，E，F は，$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ によって定まる直方体の頂点となる。

よって $\overrightarrow{\mathrm{OM}}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}+\overrightarrow{\mathrm{CM}}=\vec{c}+\frac{1}{{}^{ア}2}\vec{b}$， $\overrightarrow{\mathrm{ON}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{AN}}=\vec{a}+\frac{{}^{イ}3}{{}^{ウ}4}\vec{b}$

(2) L は線分 BD の中点であり，P は線分 FL を $s:(1-s)$ に内分する点であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(1-s)\overrightarrow{\mathrm{OF}}+s\overrightarrow{\mathrm{OL}}=(1-s)\overrightarrow{\mathrm{OF}}+s\cdot\frac{1}{2}(\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OD}})$$

$$=(1-s)(\vec{a}+\vec{c})+s\cdot\frac{1}{2}\{\vec{b}+(\vec{a}+\vec{b})\}$$

$$=\left({}^{エ}1-\frac{s}{{}^{オ}2}\right)\vec{a}+s\vec{b}+({}^{カ}1-s)\vec{c} \qquad \cdots\cdots ④$$

また $\overrightarrow{\mathrm{MP}}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OM}}=\left(1-\frac{s}{2}\right)\vec{a}+s\vec{b}+(1-s)\vec{c}-\left(\frac{1}{2}\vec{b}+\vec{c}\right)$

$$=\left(1-\frac{s}{2}\right)\vec{a}+\left(s-\frac{1}{2}\right)\vec{b}-s\vec{c},$$

$$\overrightarrow{\mathrm{MN}}=\overrightarrow{\mathrm{ON}}-\overrightarrow{\mathrm{OM}}=\vec{a}+\frac{3}{4}\vec{b}-\left(\frac{1}{2}\vec{b}+\vec{c}\right)$$

$$=\vec{a}+\frac{1}{4}\vec{b}-\vec{c}$$

$\overrightarrow{\mathrm{MP}}=k\overrightarrow{\mathrm{MN}}$ (k は実数) とおくと $\left(1-\frac{s}{2}\right)\vec{a}+\left(s-\frac{1}{2}\right)\vec{b}-s\vec{c}=k\vec{a}+\frac{1}{4}k\vec{b}-k\vec{c}$

4 点 O，A，B，C は同じ平面上にないから $1-\frac{s}{2}=k$，$s-\frac{1}{2}=\frac{1}{4}k$，$-s=-k$

これを解くと $s=k=\frac{2}{3}$

ゆえに，$s=\frac{{}^{キ}2}{{}^{ク}3}$ のとき，$\overrightarrow{\mathrm{MP}}=\frac{{}^{ケ}2}{{}^{コ}3}\overrightarrow{\mathrm{MN}}$ となるから，M，N，P は一直線上にあり，

2 直線 FL，MN が交わることがわかる。

(3) $s=\frac{2}{3}$ のとき，点 P は 2 直線 FL，MN の交点 G と一致するから，④ より

$$\overrightarrow{\mathrm{OG}}=\left(1-\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\right)\vec{a}+\frac{2}{3}\vec{b}+\left(1-\frac{2}{3}\right)\vec{c}=\frac{^{サ}1}{^{シ}3}\left(^{ス}2\vec{a}+{}^{セ}2\vec{b}+\vec{c}\right)$$

よって　$\overrightarrow{\mathrm{GF}}=\overrightarrow{\mathrm{OF}}-\overrightarrow{\mathrm{OG}}=(\vec{a}+\vec{c})-\frac{1}{3}(2\vec{a}+2\vec{b}+\vec{c})=\frac{1}{3}(\vec{a}-2\vec{b}+{}^{ソ}2\vec{c})$

ここで，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\perp\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}\perp\overrightarrow{\mathrm{OC}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}\perp\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ より　$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{c}\cdot\vec{a}=0$

ゆえに　$|\overrightarrow{\mathrm{GF}}|^2=\left|\frac{1}{3}(\vec{a}-2\vec{b}+2\vec{c})\right|^2=\frac{1}{9}(|\vec{a}|^2+4|\vec{b}|^2+4|\vec{c}|^2)$

$$=\frac{1}{9}\{(\sqrt{5})^2+4\cdot4^2+4\cdot(\sqrt{3})^2\}=9$$

$|\overrightarrow{\mathrm{GF}}|>0$ であるから　$|\overrightarrow{\mathrm{GF}}|={}^{タ}3$

また　$\overrightarrow{\mathrm{GH}}=\overrightarrow{\mathrm{OH}}-\overrightarrow{\mathrm{OG}}=t\vec{c}-\frac{1}{3}(2\vec{a}+2\vec{b}+\vec{c})=\frac{1}{3}\{-2\vec{a}-2\vec{b}+(3t-1)\vec{c}\}$

よって　$\overrightarrow{\mathrm{GF}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{GH}}=\frac{1}{3}(\vec{a}-2\vec{b}+2\vec{c})\cdot\frac{1}{3}\{-2\vec{a}-2\vec{b}+(3t-1)\vec{c}\}$

$$=\frac{1}{9}\{-2|\vec{a}|^2+4|\vec{b}|^2+2(3t-1)|\vec{c}|^2\}$$

$$=\frac{1}{9}\{-2\cdot(\sqrt{5})^2+4\cdot4^2+2(3t-1)\cdot(\sqrt{3})^2\}$$

$$={}^{チ}2t+\frac{^{ツテ}16}{^{ト}3}\quad\cdots\cdots ①$$

さらに，$\angle\mathrm{FGH}=\angle\mathrm{MGH}$ であるとき

$$\frac{\overrightarrow{\mathrm{GF}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{GH}}}{\overrightarrow{\mathrm{GM}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{GH}}}=\frac{|\overrightarrow{\mathrm{GF}}||\overrightarrow{\mathrm{GH}}|\cos\angle\mathrm{FGH}}{|\overrightarrow{\mathrm{GM}}||\overrightarrow{\mathrm{GH}}|\cos\angle\mathrm{MGH}}=\frac{|\overrightarrow{\mathrm{GF}}|}{|\overrightarrow{\mathrm{GM}}|}=\frac{3}{2}$$

よって　$\overrightarrow{\mathrm{GF}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{GH}}=\frac{^{ナ}3}{^{ニ}2}\overrightarrow{\mathrm{GM}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{GH}}$　$\cdots\cdots$ ③

$\overrightarrow{\mathrm{GM}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{GH}}=2t+\frac{10}{3}$ $\cdots\cdots$ ② であるから，①，②，③ より

$$2t+\frac{16}{3}=\frac{3}{2}\left(2t+\frac{10}{3}\right)$$　これを解くと　$t=\frac{^{ヌ}1}{^{ネ}3}$

参考　$\angle\mathrm{FGH}=\angle\mathrm{MGH}$ であるとき，$\cos\angle\mathrm{FGH}=\cos\angle\mathrm{MGH}\fallingdotseq 0$ である。

なぜなら，①，② より　$\overrightarrow{\mathrm{GF}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{GH}}=0 \iff t=-\frac{8}{3}$

$$\overrightarrow{\mathrm{GM}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{GH}}=0 \iff t=-\frac{5}{3}$$

よって，$\cos\angle\mathrm{FGH}=0$ かつ $\cos\angle\mathrm{MGH}=0$ とはならないから，
$\cos\angle\mathrm{FGH}=\cos\angle\mathrm{MGH}$ のとき　$\cos\angle\mathrm{FGH}\fallingdotseq 0$ かつ $\cos\angle\mathrm{MGH}\fallingdotseq 0$