数学Ⅱ・B　第 3 問

等差数列 $\{a_n\}$ の公差を d とすると　　$a_n=a_1+(n-1)d$

$a_2=-\dfrac{7}{3}$ から　　$a_1+d=-\dfrac{7}{3}$　…… ③

$a_5=-\dfrac{25}{3}$ から　　$a_1+4d=-\dfrac{25}{3}$　…… ④

③，④ を解くと　　$a_1=\dfrac{{}^{\text{アイ}}-1}{{}^{\text{ウ}}3}$，$d={}^{\text{エオ}}-2$

よって　　$a_n=-\dfrac{1}{3}+(n-1)\cdot(-2)={}^{\text{カキ}}-2n+\dfrac{{}^{\text{ク}}5}{{}^{\text{ケ}}3}$　　$(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$

$S_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}a_k$ は，初項 $a_1=-\dfrac{1}{3}$，末項 $a_n=-2n+\dfrac{5}{3}$，項数 n の等差数列の和であるから

$$S_n=\frac{1}{2}n\left\{-\frac{1}{3}+\left(-2n+\frac{5}{3}\right)\right\}={}^{\text{コ}}-n^2+\frac{{}^{\text{サ}}2}{{}^{\text{シ}}3}n\qquad(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$$

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}b_k=\frac{4}{3}b_n+S_n$ …… ① に $n=1$ を代入すると　　$b_1=\dfrac{4}{3}b_1+S_1$

すなわち　　$b_1=-3S_1$

$S_1=a_1=-\dfrac{1}{3}$ であるから　　$b_1=-3\cdot\left(-\dfrac{1}{3}\right)={}^{\text{ス}}1$

① の n を $n+1$ におき換えると　　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1}b_k=\frac{4}{3}b_{n+1}+S_{n+1}$　…… ⑤

①，⑤ を $\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1}b_k=\sum_{k=1}^{n}b_k+b_{n+1}$ の両辺に代入すると

$$\frac{4}{3}b_{n+1}+S_{n+1}=\frac{4}{3}b_n+S_n+b_{n+1}$$

よって　　$b_{n+1}=4b_n-3(S_{n+1}-S_n)$

$S_{n+1}-S_n=a_{n+1}=-2(n+1)+\dfrac{5}{3}=-2n-\dfrac{1}{3}$ であるから

$$b_{n+1}=4b_n-3\left(-2n-\frac{1}{3}\right)={}^{\text{セ}}4b_n+{}^{\text{ソ}}6n+{}^{\text{タ}}1\qquad\cdots\cdots ⑥$$

$(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$

⑥ が，実数 α，β を用いて $b_{n+1}+\alpha(n+1)+\beta=4(b_n+\alpha n+\beta)$ と表されるとすると

$$b_{n+1}=4b_n+3\alpha n-\alpha+3\beta$$

$3\alpha=6$，$-\alpha+3\beta=1$ を連立して解くと　　$\alpha=2$，$\beta=1$

よって，⑥ は

$$b_{n+1}+{}^{\text{チ}}2(n+1)+{}^{\text{ツ}}1=4(b_n+2n+1)$$　と変形できる。

$c_n=b_n+2n+1$ …… ②　とおくと　　$c_{n+1}=4c_n$

$\{c_n\}$ は，$c_1=b_1+2\cdot1+1=1+2+1={}^{\text{テ}}4$，公比が ${}^{\text{ト}}4$ の等比数列であるから

$$c_n=4\cdot4^{n-1}=4^n\qquad(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$$

ゆえに，② より　　$b_n=c_n-2n-1={}^{\text{ナ}}4^n-{}^{\text{ヌ}}2n-{}^{\text{ネ}}1$　（ニ ②）　$(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$