数学Ⅱ・B　第 2 問

(1)　$y=x^3$ について　　$y'=3x^2$

よって，点 $\mathrm{P}(a,\ a^3)$ における C の接線の方程式は　　$y-a^3=3a^2(x-a)$

すなわち　　$y=3a^{{}^{\text{ア}}2}x-{}^{\text{イ}}2a^{{}^{\text{ウ}}3}$

D が点 P を通るから　　$a^3=a^2+pa+q$　…… (*)

また，D の P における接線と，C の P における接線が一致するとき，それぞれの接線の傾きが等しくなる。

$y=x^2+px+q$ について　　$y'=2x+p$

よって，点 P における D の接線の傾きは　　$2a+p$

傾きが等しいから　　$2a+p=3a^2$

ゆえに　　$p=3a^{{}^{\text{エ}}2}-{}^{\text{オ}}2a$

これと (*) から　　$a^3=a^2+(3a^2-2a)\cdot a+q$

よって　　$q={}^{\text{カキ}}-2a^3+a^{{}^{\text{ク}}2}$

(2)　D が点 $\mathrm{Q}(0,\ b)$ を通るから　　$b={}^{\text{ケコ}}-2a^3+a^{{}^{\text{サ}}2}$　…… ②

$f(x)=-2x^3+x^2$ について　　$f'(x)=-6x^2+2x$

$$=-2x(3x-1)$$

$f'(x)=0$ とすると　　$x=0,\ \dfrac{1}{3}$

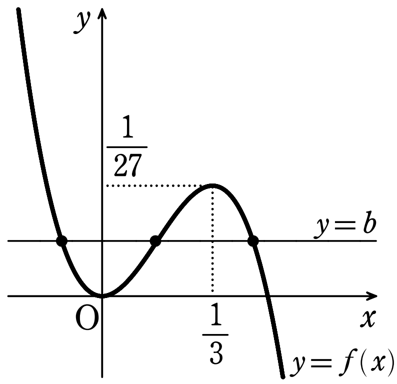
$f(x)$ の増減表は右のようになる。

x	$\cdots$	0	$\cdots$	$\frac{1}{3}$	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{27}$	$\searrow$

したがって，関数 $f(x)$ は $x={}^{\text{シ}}0$ で極小値 ${}^{\text{ス}}0$ をとり，$x=\dfrac{{}^{\text{セ}}1}{{}^{\text{ソ}}3}$ で極大値 $\dfrac{{}^{\text{タ}}1}{{}^{\text{チツ}}27}$ をとる。

② を満たす a の値の個数は，曲線 $y=f(x)$ と直線 $y=b$ の共有点の個数と一致する。

よって，右の図から，$0<b<\dfrac{1}{27}$ のとき，② を満たす a の値の個数は ${}^{\text{テ}}3$ である。



(3)　$y=x^2+(3a^2-2a)x-2a^3+a^2$ の頂点が x 軸上にあるための条件は，2 次方程式 $x^2+(3a^2-2a)x-2a^3+a^2=0$　…… ② が重解をもつことである。

つまり，② の判別式が 0 になるときである。

よって　　$(3a^2-2a)^2-4\times(-2a^3+a^2)=0$

すなわち　　$a^3(9a-4)=0$

ゆえに　　$a={}^{\text{ト}}0,\ \dfrac{{}^{\text{ナ}}4}{{}^{\text{ニ}}9}$

D_1，D_2 の頂点は x 軸上にあるから，それぞれの方程式は $y=\left(x+\dfrac{3a^2-2a}{2}\right)^2$ となる。

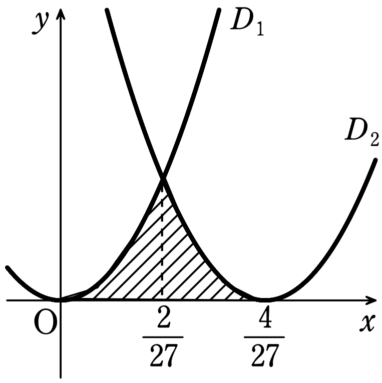
$a=0$ のとき　　$\dfrac{3a^2-2a}{2}=0$

よって，D_1 の方程式は　　$y=x^2$

$a=\dfrac{4}{9}$ のとき　　$\dfrac{3a^2-2a}{2}=\dfrac{1}{2}\left\{3\cdot\left(\dfrac{4}{9}\right)^2-2\cdot\left(\dfrac{4}{9}\right)\right\}=-\dfrac{4}{27}$

よって，D_2 の方程式は　　$y=\left(x-\dfrac{4}{27}\right)^2$

これより，求める面積を表す図形は右の図の斜線部分である。



この図形は直線 $x=\dfrac{2}{27}$ に関して対称である。

よって，求める図形の面積は

$$2\int_0^{\frac{2}{27}}x^2dx=2\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^{\frac{2}{27}}=\frac{2}{3}\times\left(\frac{2}{27}\right)^3$$

$$=\frac{2}{3}\times\left(\frac{2}{3^3}\right)^3=\frac{2^{\text{ヌ}4}}{3^{\text{ネノ}10}}$$