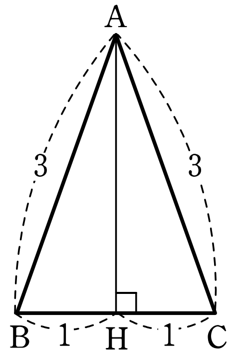
数学Ⅰ･A 第 3 問

△ABC において，点 A から辺 BC に垂線 AH を下ろす。



△ABC は AB＝AC＝3，BC＝2 の二等辺三角形であるから

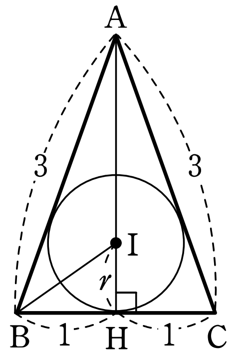
$$\mathrm{BH}=\mathrm{CH}=1,$$

$$\mathrm{AH}=\sqrt{\mathrm{AB}^2-\mathrm{BH}^2}=\sqrt{3^2-1^2}=2\sqrt{2}$$

よって　$\cos\angle\mathrm{ABC}=\dfrac{\mathrm{BH}}{\mathrm{AB}}=\dfrac{{}^{ア}1}{{}^{イ}3}$,

$$\sin\angle\mathrm{ABC}=\frac{\mathrm{AH}}{\mathrm{AB}}=\frac{{}^{ウ}2\sqrt{{}^{エ}2}}{{}^{オ}3}$$

また，△ABC の面積は　$\dfrac{1}{2}\mathrm{BC}\cdot\mathrm{AH}=\dfrac{1}{2}\cdot2\cdot2\sqrt{2}={}^{カ}2\sqrt{{}^{キ}2}$



△ABC の内接円の半径を r とすると

$$\frac{r}{2}(\mathrm{AB}+\mathrm{BC}+\mathrm{AC})=2\sqrt{2}$$

すなわち　$\dfrac{r}{2}(3+2+3)=2\sqrt{2}$　　よって　$r=\dfrac{\sqrt{{}^{ク}2}}{{}^{ケ}2}$

さらに，直角三角形 BHI において

$$\mathrm{BI}=\sqrt{\mathrm{BH}^2+\mathrm{IH}^2}=\sqrt{1^2+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{{}^{コ}6}}{{}^{サ}2}$$

別解　(△ABC の内接円の半径について)

△ABC の内接円の半径は IH の長さに等しい。

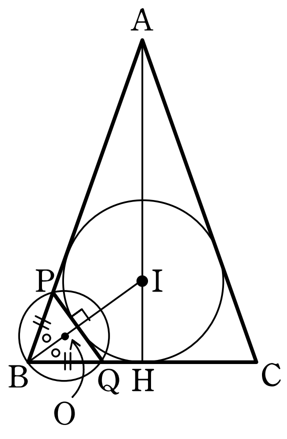
また，点 I は ∠ABC の二等分線上にあるから　AI : IH＝AB : BH＝3 : 1

ゆえに　$\mathrm{IH}=\dfrac{1}{4}\mathrm{AH}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

(1)　△PBQ の外接円の半径を R とおく。

正弦定理により　$\dfrac{\mathrm{PQ}}{\sin\angle\mathrm{PBQ}}=2R$　　よって　$2R=\dfrac{2}{3}\div\dfrac{2\sqrt{2}}{3}=\dfrac{\sqrt{{}^{シ}2}}{{}^{ス}2}$

円 I と円 O の位置関係を調べる。



△PBQ は BP＝BQ の二等辺三角形であるから，外接円の中心 O は，∠PBQ の二等分線上にある。

また，△ABC の内接円の中心 I は，∠ABC すなわち ∠PBQ の二等分線上にある。

ゆえに，I，O はともに ∠PBQ の二等分線上にあるから，B，I，O は一直線上にある。

$\mathrm{BI}=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$，$\mathrm{BO}=R=\dfrac{\sqrt{2}}{4}$ であるから

$$\mathrm{IO}=\mathrm{BI}-\mathrm{BO}=\frac{\sqrt{6}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{4}=\frac{2\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

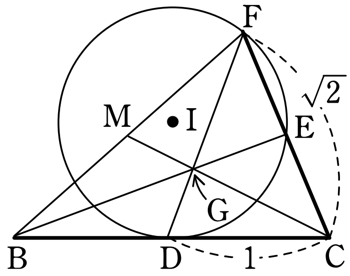
IO と $r+R$，IO と $r-R(>0)$ の大小関係について考えると

$$\mathrm{IO}-(r+R)=\frac{2\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{4}\right)=\frac{\sqrt{6}-2\sqrt{2}}{2}<0$$

$$\mathrm{IO}-(r-R)=\frac{2\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{4}\right)=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}>0$$

よって，$r-R<\mathrm{IO}<r+R$ であるから，円 I と円 O は異なる 2 点で交わる。（セ ③）

(2)　点 H を点 D とおき直す。



方べきの定理により　　$\mathrm{CE}\cdot\mathrm{CF}=\mathrm{CD}^2$

すなわち　　$\mathrm{CE}\cdot\sqrt{2}=1^2$

よって　　$\mathrm{CE}=\frac{\sqrt{{}^{ソ}2}}{{}^{タ}2}$

ゆえに，$\mathrm{EF}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ であるから　　$\frac{\mathrm{EF}}{\mathrm{CE}}={}^{チ}1$

よって，点 E は線分 CF の中点である。

さらに，点 D は線分 BC の中点であるから，点 G は △BCF の重心である。

したがって　　$\frac{\mathrm{GM}}{\mathrm{CG}}=\frac{{}^{ツ}1}{{}^{テ}2}$