数学Ⅰ･A　第2問

2次関数 ① は　　$y=-x^2+(2a+4)x+b$

$\qquad\qquad\qquad\quad =-\{x-(a+2)\}^2+a^2+4a+b+4$

よって，① のグラフ G の頂点の座標は　　$(a+{}^{\text{ア}}2,\ a^2+{}^{\text{イ}}4a+b+{}^{\text{ウ}}4)$

この頂点が直線 $y=-4x-1$ 上にあるから　　$a^2+4a+b+4=-4(a+2)-1$

整理して　　$b=-a^2-{}^{\text{エ}}8a-{}^{\text{オカ}}13$

以下，$f(x)=-x^2+(2a+4)x-a^2-8a-13$ とおく。

(1)　グラフ G の頂点の x 座標は $x=a+2$ であり，頂点は直線 $y=-4x-1$ 上にあるから，

頂点の y 座標は　　$-4(a+2)-1=-4a-9$

すなわち，G の頂点の座標は　　$(a+2,\ -4a-9)$

G は上に凸であるから，x 軸と異なる2点で交わる条件は　　(頂点の y 座標)>0

すなわち　　$-4a-9>0$　　　　よって　　$a<\dfrac{{}^{\text{キク}}-9}{{}^{\text{ケ}}4}$

また，G が x 軸の正の部分と負の部分の両方で交わる条件は

$$f(0)=-a^2-8a-13>0$$

これを解いて　　$-{}^{\text{コ}}4-\sqrt{{}^{\text{サ}}3}<a<-4+\sqrt{3}$

(2)　$f(x)=-x^2+(2a+4)x-a^2-8a-13$ の $0\leqq x\leqq 4$ における最小値を考える。

[1]　$a+2<2$ すなわち $a<0$ のとき

$f(x)$ の最小値は　　$f(4)=-4^2+(2a+4)\cdot 4-a^2-8a-13$

$\qquad\qquad\qquad\qquad\quad =-a^2-13$

よって　　$-a^2-13=-22$　　　　すなわち　　$a^2=9$

$a<0$ より　　$a=-3$

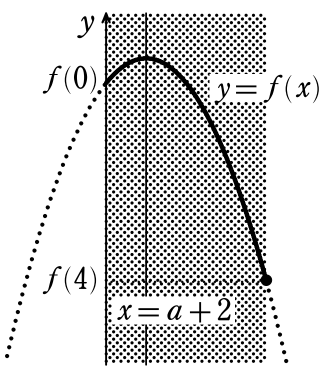
[2]　$a+2\geqq 2$ すなわち $a\geqq 0$ のとき

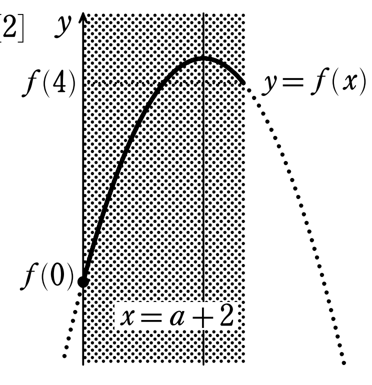
$f(x)$ の最小値は　　$f(0)=-a^2-8a-13$

よって　　$-a^2-8a-13=-22$　　　　すなわち　　$(a+9)(a-1)=0$

$a\geqq 0$ より　　$a=1$

[1]，[2] より，求める a の値は　　$a={}^{\text{シス}}-3,\ {}^{\text{セ}}1$

[1]


[2]


$a=1$ のとき，G の軸の方程式は　　$x=3$

このとき，軸は $0\leqq x\leqq 4$ の範囲に含まれるから，関数 ① の $0\leqq x\leqq 4$ における最大値

は　　$-4a-9=-4\cdot 1-9={}^{ソタチ}-13$

また，$a=-3$ のとき，G の頂点の座標は　　$(-1,\ 3)$

　　$a=1$ のとき，G の頂点の座標は　　$(3,\ -13)$

ゆえに，$a=-3$ のときの ① のグラフを，

　　x 軸方向に　$3-(-1)={}^{ツ}4$，　y 軸方向に　$-13-3={}^{テトナ}-16$

だけ平行移動すると，$a=1$ のときの ① のグラフと一致する。