数学Ⅰ・A　第１問〔2〕

(1)　条件 p の否定 $\overline{p}$ は　　$\overline{p}$：$m \leqq k$ かつ $n \leqq k$（ク ②）

(2)　(i)　$k=1$ のとき　　p：$m>1$ または $n>1$

q：$mn>1$

条件 p の否定 $\overline{p}$ は　　$\overline{p}$：$m \leqq 1$ かつ $n \leqq 1$

条件 q の否定 $\overline{q}$ は　　$\overline{q}$：$mn \leqq 1$

m，n が自然数であることから

$$m \leqq 1 \text{ かつ } n \leqq 1 \iff m=1,\ n=1$$

$$mn \leqq 1 \iff m=1,\ n=1$$

よって，$\overline{p} \iff \overline{q}$ が成り立つから，$p \iff q$ も成り立つ。

ゆえに，p は q であるための必要十分条件である。（ケ ⓪）

(ii)　$k=2$ のとき　　p：$m>2$ または $n>2$

q：$mn>4$

r：$mn>2$

条件 p の否定 $\overline{p}$ は　　$\overline{p}$：$m \leqq 2$ かつ $n \leqq 2$

条件 q の否定 $\overline{q}$ は　　$\overline{q}$：$mn \leqq 4$

条件 r の否定 $\overline{r}$ は　　$\overline{r}$：$mn \leqq 2$

（条件 p，r について）

命題「$p \Longrightarrow r$」の対偶「$\overline{r} \Longrightarrow \overline{p}$」は真である。

（証明）　条件 $\overline{r}$ を満たす自然数 m，n の組は

$$(m,\ n)=(1,\ 1),\ (1,\ 2),\ (2,\ 1)$$

これらはいずれも条件 $\overline{p}$ を満たす。（証明終）

よって，対偶が真であるから，命題「$p \Longrightarrow r$」も真である。

また，命題「$r \Longrightarrow p$」の対偶「$\overline{p} \Longrightarrow \overline{r}$」は偽である。（反例：$m=2$，$n=2$）

ゆえに，対偶が偽であるから，命題「$r \Longrightarrow p$」も偽である。

したがって，p は r であるための十分条件であるが，必要条件でない。（コ ②）

（条件 p，q について）

命題「$p \Longrightarrow q$」の対偶「$\overline{q} \Longrightarrow \overline{p}$」は偽である。（反例：$m=3$，$n=1$）

よって，対偶が偽であるから，命題「$p \Longrightarrow q$」も偽である。

また，命題「$q \Longrightarrow p$」の対偶「$\overline{p} \Longrightarrow \overline{q}$」は真である。

（証明）　条件 $\overline{p}$ を満たす自然数 m，n の組は

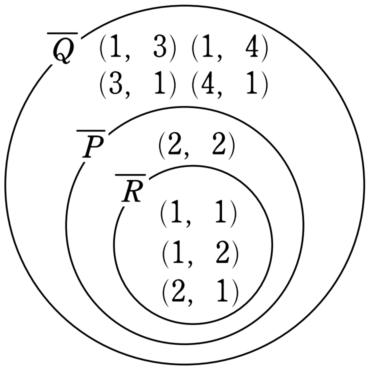
$$(m,\ n)=(1,\ 1),\ (1,\ 2),\ (2,\ 1),\ (2,\ 2)$$

これらはいずれも条件 $\overline{q}$ を満たす。（証明終）

よって，対偶が真であるから，命題「$q \Longrightarrow p$」も真である。

したがって，p は q であるための必要条件であるが，十分条件でない。（サ ①）

参考　自然数 m，n の組 $(m,\ n)$ について，
条件 p，q，r を満たす集合をそれぞれ P，Q，R とすると，その補集合 $\overline{P}$，$\overline{Q}$，$\overline{R}$ について，右の図のような関係がある。



よって　　$\overline{R} \subset \overline{P} \subset \overline{Q}$
すなわち　$R \supset P \supset Q$