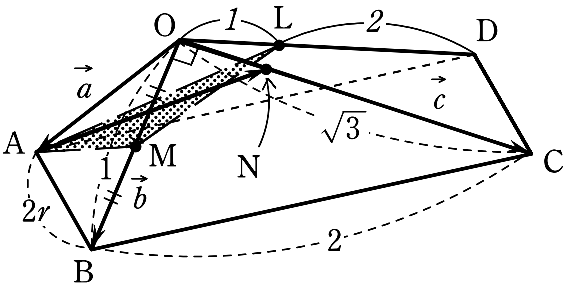
数学Ⅱ・B　第 4 問



四角形 ABCD は長方形であるから

$$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$$

よって　$\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{BC}$

$$=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB}$$

$$={}^{\text{ア}}\vec{a}-{}^{\text{イ}}\vec{b}+\vec{c}$$

点 L は，辺 OD を 1：2 に内分するから

$$\overrightarrow{OL}=\frac{1}{1+2}\overrightarrow{OD}=\frac{1}{3}(\vec{a}-\vec{b}+\vec{c})$$

よって　$\overrightarrow{AL}=\overrightarrow{OL}-\overrightarrow{OA}=\frac{1}{3}(\vec{a}-\vec{b}+\vec{c})-\vec{a}=-\frac{{}^{\text{ウ}}2}{{}_{\text{エ}}3}\vec{a}-\frac{{}^{\text{オ}}1}{3}\vec{b}+\frac{{}^{\text{カ}}1}{3}\vec{c}$

さらに，M は辺 OB の中点であるから　$\overrightarrow{OM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{OB}=\frac{1}{2}\vec{b}$

よって　$\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OA}=\frac{1}{2}\vec{b}-\vec{a}$

ゆえに　$\overrightarrow{ON}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AN}=\overrightarrow{OA}+s\overrightarrow{AL}+t\overrightarrow{AM}$

$$=\vec{a}+s\left(-\frac{2}{3}\vec{a}-\frac{1}{3}\vec{b}+\frac{1}{3}\vec{c}\right)+t\left(\frac{1}{2}\vec{b}-\vec{a}\right)$$

$$=\left({}^{\text{キ}}1-\frac{{}^{\text{ク}}2}{{}_{\text{ケ}}3}s-t\right)\vec{a}+\left(-\frac{s}{{}_{\text{コ}}3}+\frac{t}{{}_{\text{サ}}2}\right)\vec{b}+\frac{s}{{}_{\text{シ}}3}\vec{c}$$

一方，点 N は辺 OC 上にあるから，実数 k を用いて $\overrightarrow{ON}=k\vec{c}$ と表される。

$\vec{a}\neq\vec{0}$，$\vec{b}\neq\vec{0}$，$\vec{c}\neq\vec{0}$ で，$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ は同一平面上にはないから

$$1-\frac{2}{3}s-t=0,\quad -\frac{s}{3}+\frac{t}{2}=0,\quad \frac{s}{3}=k$$

これを解くと　$s=\frac{3}{4}$，$t=\frac{1}{2}$，$k=\frac{1}{4}$　　したがって　$\overrightarrow{ON}=\frac{{}^{\text{ス}}1}{{}_{\text{セ}}4}\vec{c}$

また，△OBC と △OAD は合同であるから　OA＝OB＝1

すなわち　$|\vec{a}|=|\vec{b}|=1$

ここで　$|\overrightarrow{AB}|^2=|\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}|^2=|\vec{b}-\vec{a}|^2=|\vec{b}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{a}|^2=1^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+1^2$

$$=2-2\vec{a}\cdot\vec{b}$$

一方　$|\overrightarrow{AB}|^2=AB^2=(2r)^2=4r^2$

よって　$2-2\vec{a}\cdot\vec{b}=4r^2$　　ゆえに　$\vec{a}\cdot\vec{b}={}^{\text{ソ}}1-{}^{\text{タ}}2r^2$

OB＝1，BC＝2，OC＝$\sqrt{3}$ より，△OBC は ∠BOC＝90° の直角三角形である。

よって　$\vec{b}\cdot\vec{c}={}^{\text{チ}}0$

また　$|\vec{c}|=OC=\sqrt{3}$

ゆえに　$|\overrightarrow{AC}|^2=|\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}|^2=|\vec{c}-\vec{a}|^2=|\vec{c}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{c}+|\vec{a}|^2=(\sqrt{3})^2-2\vec{a}\cdot\vec{c}+1^2$

$$=4-2\vec{a}\cdot\vec{c}$$

一方，$|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2=\mathrm{AC}^2$ であり，直角三角形 ABC において三平方の定理により

$$\mathrm{AC}^2=\mathrm{AB}^2+\mathrm{BC}^2=(2r)^2+2^2=4r^2+4$$

よって　$4-2\vec{a}\cdot\vec{c}=4r^2+4$　　ゆえに　$\vec{a}\cdot\vec{c}={}^{\text{ツテ}}-2r^2$

ここで　$\overrightarrow{\mathrm{MN}}=\overrightarrow{\mathrm{ON}}-\overrightarrow{\mathrm{OM}}=\dfrac{1}{4}\vec{c}-\dfrac{1}{2}\vec{b}$

よって　$\overrightarrow{\mathrm{AM}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{MN}}=\left(\dfrac{1}{2}\vec{b}-\vec{a}\right)\cdot\left(\dfrac{1}{4}\vec{c}-\dfrac{1}{2}\vec{b}\right)=\dfrac{1}{8}\vec{b}\cdot\vec{c}-\dfrac{1}{4}|\vec{b}|^2-\dfrac{1}{4}\vec{a}\cdot\vec{c}+\dfrac{1}{2}\vec{a}\cdot\vec{b}$

$$=\frac{1}{8}\cdot 0-\frac{1}{4}\cdot 1^2-\frac{1}{4}\cdot(-2r^2)+\frac{1}{2}\cdot(1-2r^2)=\frac{1}{4}(1-2r^2)$$

$\overrightarrow{\mathrm{AM}}\neq\vec{0}$，$\overrightarrow{\mathrm{MN}}\neq\vec{0}$ であるから，直線 AM と直線 MN が垂直になるための条件は

$$\overrightarrow{\mathrm{AM}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{MN}}=0$$

ゆえに　$\dfrac{1}{4}(1-2r^2)=0$　　すなわち　$r^2=\dfrac{1}{2}$

$\mathrm{AB}>0$ より，$r>0$ であるから　$r=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

したがって　$\mathrm{AB}=2r=2\cdot\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\sqrt{{}^{\text{ト}}2}$