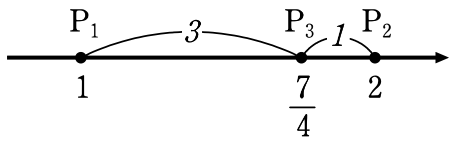
数学Ⅱ・B　第 3 問

P_3 は線分 P_1P_2 を $3:1$ に内分する点である



から　　$x_3=\dfrac{1\cdot 1+3\cdot 2}{3+1}=\dfrac{{}^{ア}7}{{}^{イ}4}$

同様に，P_{n+2} は線分 P_nP_{n+1} を $3:1$ に内分する点であるから

$$x_{n+2}=\frac{1\cdot x_n+3\cdot x_{n+1}}{3+1}=\frac{3}{4}x_{n+1}+\frac{1}{4}x_n$$

よって　　$x_{n+2}-x_{n+1}=\left(\dfrac{3}{4}x_{n+1}+\dfrac{1}{4}x_n\right)-x_{n+1}$

すなわち　　$x_{n+2}-x_{n+1}=-\dfrac{1}{4}(x_{n+1}-x_n)$

$y_n=x_{n+1}-x_n$ とおくと　　$y_1=x_2-x_1=2-1={}^{ウ}1$,

$$y_{n+1}=\frac{{}^{エオ}-1}{{}^{カ}4}y_n \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$$

よって，数列 $\{y_n\}$ は，初項 1，公比 $-\dfrac{1}{4}$ の等比数列であるから

$$y_n=1\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)^{n-1}=\left(\frac{-1}{4}\right)^{n-1} \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$$　　ゆえに　^{キ} ⓪

また，数列 $\{y_n\}$ は数列 $\{x_n\}$ の階差数列であるから，$n\geqq 2$ のとき

$$x_n=x_1+\sum_{k=1}^{n-1}y_k=1+\sum_{k=1}^{n-1}\left(-\frac{1}{4}\right)^{k-1}=1+\frac{1-\left(-\frac{1}{4}\right)^{n-1}}{1-\left(-\frac{1}{4}\right)}=\frac{9}{5}-\frac{4}{5}\left(-\frac{1}{4}\right)^{n-1}$$

初項は $x_1=1$ であるから，この式は $n=1$ のときにも成り立つ。

したがって　　$x_n=\dfrac{{}^{ク}9}{{}^{ケ}5}-\dfrac{{}^{コ}4}{5}\left(\dfrac{-1}{4}\right)^{n-1}$　$(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$　　ゆえに　^{サ} ⓪

次に，$S_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k|y_k|=\sum_{k=1}^{n}k\left|\left(-\frac{1}{4}\right)^{k-1}\right|=\sum_{k=1}^{n}k\left|-\frac{1}{4}\right|^{k-1}=\sum_{k=1}^{n}k\left(\frac{1}{4}\right)^{k-1}$ を求める。

$r=\left|\dfrac{-1}{4}\right|=\dfrac{1}{4}$ であるから　　$S_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}kr^{k-1}$

すなわち　　$S_n=1+2r+3r^2+\cdots\cdots+nr^{n-1}$

よって　　$rS_n=r+2r^2+\cdots\cdots+(n-1)r^{n-1}+nr^n$

辺々を引くと　　$S_n-rS_n=1+r+r^2+\cdots\cdots+r^{n-1}-nr^n$

すなわち　　$S_n-rS_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}r^{k-1}-nr^n$　　ゆえに　^{シ} ①，^{ス} ①

したがって　　$S_n=\dfrac{1}{1-r}\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n}r^{k-1}-nr^n\right)=\dfrac{1}{1-r}\left(\dfrac{1-r^n}{1-r}-nr^n\right)$

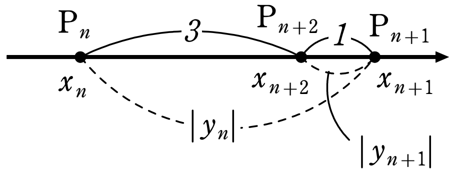
$$=\frac{1}{(1-r)^2}(1-r^n)-\frac{n}{1-r}r^n=\frac{1}{\left(1-\frac{1}{4}\right)^2}\left\{1-\left(\frac{1}{4}\right)^n\right\}-\frac{n}{1-\frac{1}{4}}\left(\frac{1}{4}\right)^n$$

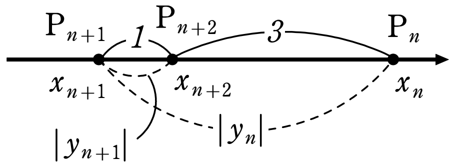
$$=\frac{16}{9}\left\{1-\left(\frac{1}{4}\right)^n\right\}-\frac{n}{3}\cdot 4\left(\frac{1}{4}\right)^n$$

$$=\frac{{}^{\text{セソ}}16}{{}^{\text{タ}}9}\left\{1-\left(\frac{1}{{}^{\text{チ}}4}\right)^n\right\}-\frac{n}{{}^{\text{テ}}3}\left(\frac{1}{{}^{\text{ト}}4}\right)^{n-1}$$

ゆえに　ツ①，ナ⓪

参考　$y_n=x_{n+1}-x_n$ に対して，





線分 P_nP_{n+1} の長さは　$|y_n|$

線分 $P_{n+1}P_{n+2}$ の長さは　$|y_{n+1}|$

また，P_{n+2} は線分 P_nP_{n+1} を $3:1$ に内分する点であるから　$|y_n|:|y_{n+1}|=4:1$

よって　$\dfrac{|y_{n+1}|}{|y_n|}=\dfrac{1}{4}$　ゆえに　$\left|\dfrac{y_{n+1}}{y_n}\right|=\dfrac{1}{4}$

すなわち　$\dfrac{y_{n+1}}{y_n}=\pm\dfrac{1}{4}$

ここで，$x_{n+1}>x_n$ のとき　$x_{n+2}<x_{n+1}$　すなわち　$y_n>0$ のとき　$y_{n+1}<0$

$x_{n+1}<x_n$ のとき　$x_{n+2}>x_{n+1}$　すなわち　$y_n<0$ のとき　$y_{n+1}>0$

よって，いずれの場合も　$\dfrac{y_{n+1}}{y_n}<0$

したがって，$\dfrac{y_{n+1}}{y_n}=-\dfrac{1}{4}$ であるから　$y_{n+1}=\dfrac{{}^{\text{エオ}}-1}{{}^{\text{カ}}4}y_n$　$(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$