数学Ⅱ・B　第 2 問

$y=x^2$ から　　$y'=2x$

よって，曲線 C 上の点 $\mathrm{P}(a,\ a^2)$ における C の接線 ℓ の方程式は

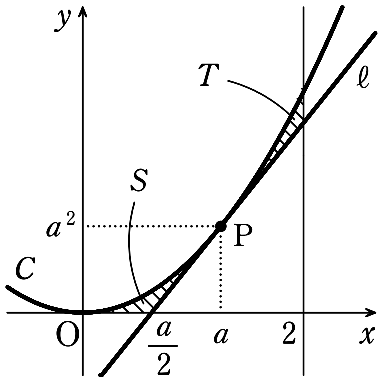
$$y-a^2=2a(x-a)\qquad \text{すなわち}\qquad y={}^{\text{アイ}}2ax-a^{{}^{\text{ウ}}2}$$

$y=0$ とすると　　$0=2ax-a^2$　　　すなわち　　$2ax=a^2$

$a\neq 0$ のとき，これを解くと　　$x=\dfrac{a}{2}$

よって，$a\neq 0$ のとき，直線 ℓ と x 軸の交点 Q の座標は　$\left(\dfrac{{}^{\text{エ}}a}{{}^{\text{オ}}2},\ {}^{\text{カ}}0\right)$

$a>0$ のとき，曲線 C と直線 ℓ および x 軸で囲まれた図形の面積 S は，右の図より



$$S=\int_0^a x^2dx-\frac{1}{2}\cdot\left(a-\frac{a}{2}\right)\cdot a^2=\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^a-\frac{a^3}{4}$$

$$=\frac{a^3}{3}-\frac{a^3}{4}=\frac{a^{{}^{\text{キ}}3}}{{}^{\text{クケ}}12}$$

$a<2$ のとき，曲線 C と直線 ℓ および直線 $x=2$ で囲まれた図形の面積 T は，右の図より

$$T=\int_a^2\{x^2-(2ax-a^2)\}dx=\int_a^2(x-a)^2dx=\left[\frac{1}{3}(x-a)^3\right]_a^2=\frac{1}{3}(2-a)^3$$

$$=-\frac{a^3}{{}^{\text{コ}}3}+{}^{\text{サ}}2a^2-{}^{\text{シ}}4a+\frac{{}^{\text{ス}}8}{{}^{\text{セ}}3}$$

よって，$0\leqq a\leqq 2$ のとき　　$U=S+T=\dfrac{a^3}{12}+\dfrac{1}{3}(2-a)^3=-\dfrac{a^3}{4}+2a^2-4a+\dfrac{8}{3}$

両辺を a で微分すると　　$\dfrac{dU}{da}=-\dfrac{3}{4}a^2+4a-4=-\dfrac{1}{4}(3a-4)(a-4)$

$\dfrac{dU}{da}=0$ とすると　　$a=\dfrac{4}{3},\ 4$

よって，$0\leqq a\leqq 2$ における U の増減表は右のようになる。

a	0	$\cdots$	$\dfrac{4}{3}$	$\cdots$	2
$\dfrac{dU}{da}$		$-$	0	$+$	
U		↘	極小	↗	

ここで，$a=0$ のとき　　$U=\dfrac{8}{3}$

$a=2$ のとき　　$U=\dfrac{2^3}{12}=\dfrac{2}{3}$

$a=\dfrac{4}{3}$ のとき　　$U=\dfrac{1}{12}\left(\dfrac{4}{3}\right)^3+\dfrac{1}{3}\left(2-\dfrac{4}{3}\right)^3=\dfrac{8}{27}$

したがって，U は $a={}^{\text{ソ}}0$ で最大値 $\dfrac{{}^{\text{タ}}8}{{}^{\text{チ}}3}$ をとり，$a=\dfrac{{}^{\text{ツ}}4}{{}^{\text{テ}}3}$ で最小値 $\dfrac{{}^{\text{ト}}8}{{}^{\text{ナニ}}27}$ をとる。