数学Ⅱ・B　第１問〔2〕

x が正の実数のとき　$\log_2\sqrt{x}=\log_2 x^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}\log_2 x=\frac{1}{2}X,$

$$\log_4 x=\frac{\log_2 x}{\log_2 4}=\frac{\log_2 x}{\log_2 2^2}=\frac{1}{2}\log_2 x=\frac{1}{2}X$$

よって，① は　$12\left(\frac{1}{2}X\right)^2-7\cdot\frac{1}{2}X-10>0$

整理すると　$6X^2-{}^{チ}7X-{}^{ツテ}20>0$　　すなわち　$(3X+4)(2X-5)>0$

ゆえに　$X<-\frac{{}^{ト}4}{{}^{ナ}3},\ \frac{{}^{ニ}5}{{}^{ヌ}2}<X$

x が自然数のとき，$X=\log_2 x\geqq\log_2 1=0$ であるから　$X>\frac{5}{2}$

すなわち　$\log_2 x>\frac{5}{2}$

底 2 は 1 より大きいから　$x>2^{\frac{5}{2}}$　　よって　$x>4\sqrt{2}$

ここで，$\sqrt{25}<\sqrt{32}<\sqrt{36}$ であるから　$5<4\sqrt{2}<6$

したがって，$x>4\sqrt{2}$ すなわち条件 ① を満たす最小の自然数 x は ${}^{ネ}6$ であり，6 以上のすべての自然数 x は ① を満たす。

また，② について，$x\geqq14$ のとき，$\log_3 x>0$ であるから　$x+\log_3 x>14$

よって，14 以上の自然数 x は ② を満たさない。

さらに，$\log_3 1=0$，$\log_3 3=1$，$\log_3 9=\log_3 3^2=2$，$\log_3 27=\log_3 3^3=3$ であるから，

$x=1,\ 2$ のとき　$0\leqq\log_3 x<1$

$3\leqq x<9$ のとき　$1\leqq\log_3 x<2$

$9\leqq x<27$ のとき　$2\leqq\log_3 x<3$

ゆえに，$x=13,\ 12,\ 11\cdots\cdots$ の順に，$x+\log_3 x$ の値の範囲を求めると

$$15\leqq13+\log_3 13<17,\ 14\leqq12+\log_3 12<15,\ 13\leqq11+\log_3 11<14,\ \cdots\cdots$$

よって，条件 ② を満たす最大の自然数 x は　${}^{ノハ}11$

参考　$x\leqq11$ のとき，$\log_3 x\leqq\log_3 11$ であるから　$x+\log_3 x\leqq11+\log_3 11<14$

よって，11 以下のすべての自然数 x は ② を満たす。

したがって，条件 ①，② を満たす自然数 x は，6 以上 11 以下の自然数である。

別解　② から　$\log_3 x<14-x$

底 3 は 1 より大きいから　$x<3^{14-x}$　$\cdots\cdots$ ③

ここで，③ の両辺に $x=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots$ を順に代入し，両辺の値を大小比較すると

$$1<3^{13},\ 2<3^{12},\ 3<3^{11},\ \cdots\cdots,\ 11<3^3=27,\ 12>3^2=9,\ 13>3,\ \cdots\cdots$$

また，関数 $y=3^{14-x}$ について，x の値が増加すると y の値は減少する。

よって，$x\geqq12$ のとき $3^{14-x}\leqq3^{14-12}=9$ であるから，12 以上の自然数 x は ③ を満たさない。

ゆえに，③ すなわち ② を満たす最大の自然数 x は　　ノハ11