

数学Ⅱ・B 第1問〔1〕

$$t = \sin \theta + \sqrt{3} \cos \theta \text{ の両辺を 2 乗すると } t^2 = \sin^2 \theta + 2\sqrt{3} \sin \theta \cos \theta + 3\cos^2 \theta$$

$$\sin^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta \text{ を代入して整理すると } t^2 = 2\cos^2 \theta + 2\sqrt{3} \sin \theta \cos \theta + 1$$

$$\begin{aligned} \text{よって } y &= \cos 2\theta + \sqrt{3} \sin 2\theta - 2\sqrt{3} \cos \theta - 2\sin \theta \\ &= (2\cos^2 \theta - 1) + \sqrt{3} \cdot 2\sin \theta \cos \theta - 2(\sin \theta + \sqrt{3} \cos \theta) \\ &= (2\cos^2 \theta + 2\sqrt{3} \sin \theta \cos \theta + 1) - 2(\sin \theta + \sqrt{3} \cos \theta) - 2 \\ &= t^2 - 2t - 2 \end{aligned}$$

$$\text{また } t = \sin \theta + \sqrt{3} \cos \theta = 2 \sin \left(\theta + \frac{\pi}{3} \right)$$

$$-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq 0 \text{ であるから } -\frac{\pi}{6} \leq \theta + \frac{\pi}{3} \leq \frac{\pi}{3}$$

$$\text{よって, 右の図より, } -\frac{1}{2} \leq \sin \left(\theta + \frac{\pi}{3} \right) \leq \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ で}$$

$$\text{あるから } -1 \leq 2 \sin \left(\theta + \frac{\pi}{3} \right) \leq \sqrt{3}$$

$$\text{すなわち } -1 \leq t \leq \sqrt{3}$$

ゆえに, $y = t^2 - 2t - 2 = (t-1)^2 - 3$ は $t=1$ のとき
最小値 -3 をとる。

$$\text{ここで, } t=1 \text{ のとき } 2 \sin \left(\theta + \frac{\pi}{3} \right) = 1$$

$$\text{すなわち } \sin \left(\theta + \frac{\pi}{3} \right) = \frac{1}{2}$$

$$-\frac{\pi}{6} \leq \theta + \frac{\pi}{3} \leq \frac{\pi}{3} \text{ であるから } \theta + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6}$$

$$\text{よって } \theta = -\frac{\pi}{6}$$

