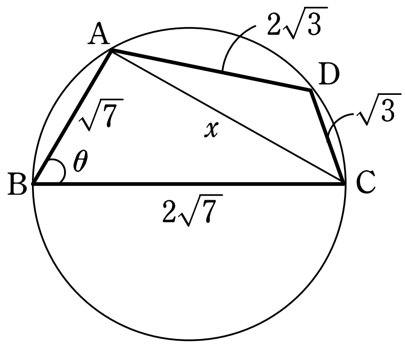
数学Ⅰ・A　第３問

(1)　△ABC において，余弦定理により



$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC\cos\angle ABC$$

すなわち

$$x^2 = (\sqrt{7})^2 + (2\sqrt{7})^2 - 2\cdot\sqrt{7}\cdot 2\sqrt{7}\cos\theta$$

$$= {}^{アイ}35 - 28\cos\theta \quad \cdots\cdots ①$$

また，△ACD において，余弦定理により

$$AC^2 = CD^2 + DA^2 - 2CD\cdot DA\cos\angle ADC$$

すなわち

$$x^2 = (\sqrt{3})^2 + (2\sqrt{3})^2 - 2\cdot\sqrt{3}\cdot 2\sqrt{3}\cos(180° - \theta)$$

$$= 15 + {}^{ウエ}12\cos\theta \quad \cdots\cdots ②$$

①，② より　$35 - 28\cos\theta = 15 + 12\cos\theta$　　よって　$\cos\theta = \dfrac{{}^{オ}1}{{}^{カ}2}$

また　$x^2 = 35 - 28\cdot\dfrac{1}{2} = 21$　　ゆえに　$x = \sqrt{{}^{キク}21}$

よって，$AB^2 + AC^2 = BC^2$ であるから，△ABC は ∠BAC＝90° の直角三角形である。

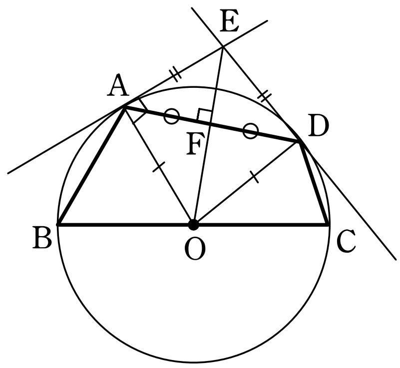
ゆえに，線分 BC は円 O の直径であるから，円 O の半径は　$\sqrt{{}^{ケ}7}$

また，$\sin\theta = \sqrt{1 - \left(\dfrac{1}{2}\right)^2} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ であるから，四角形 ABCD の面積は

$$\frac{1}{2}AB\cdot BC\sin\theta + \frac{1}{2}CD\cdot DA\sin(180° - \theta)$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\sqrt{7}\cdot 2\sqrt{7}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\cdot\sqrt{3}\cdot 2\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = {}^{コ}5\sqrt{{}^{サ}3}$$

(2)　直線 AE は円 O の接線であるから



$$\angle OAE = {}^{シス}90°$$

また，△OAE と △ODE は合同で，OE は線分 AD の垂直二等分線になるから

$$\angle AFE = {}^{セソ}90°$$

ここで，△OAE と △OFA において

$$\angle OAE = \angle OFA = 90°,$$

$$\angle AOE = \angle FOA \text{ (共通)}$$

よって，2 組の角がそれぞれ等しいから

$$\triangle OAE \backsim \triangle OFA$$

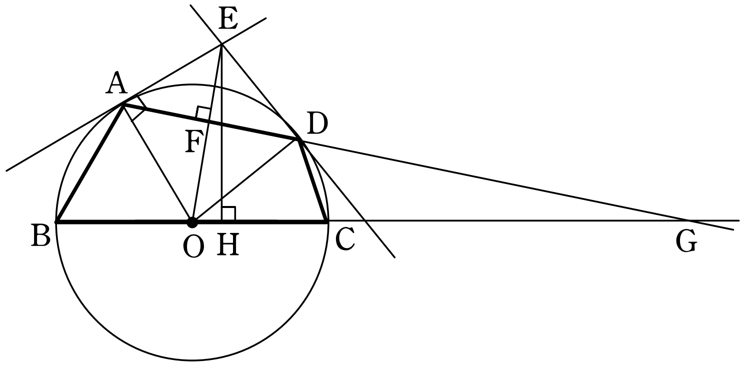
ゆえに　$OA : OE = OF : OA$

よって　$OE\cdot OF = OA^2$　　したがって　$OE\cdot OF = {}^{タ}7$

さらに，点 G，E について，
∠EHG＝∠EFG＝90° で
あるから，円周角の定理の
逆により，

4 点 E，G，H，F

は同一円周上にある。



すなわち　　[チ] ②

さらに，

O，H，G と O，F，E

は，それぞれ一直線上にある。

よって，方べきの定理により　　OH·OG＝OF·OE

したがって　　OH·OG＝[ツ]7