数学Ⅰ・A 第 2 問

$y=ax^2+bx+c$ のグラフ G の軸の方程式は　　$x=-\dfrac{b}{2a}$

$y=-3x^2+12bx$ のグラフの軸の方程式は　　$x=-\dfrac{12b}{2\cdot(-3)}=2b$

これらが等しいから　　$-\dfrac{b}{2a}=2b$　　　$b\neq 0$ であるから　　$a=\dfrac{{}^{\text{アイ}}-1}{{}^{\text{ウ}}4}$

よって，① の方程式は　　$y=-\dfrac{1}{4}x^2+bx+c$

さらに，G が点 $(1,\ 2b-1)$ を通るとき　　$2b-1=-\dfrac{1}{4}+b+c$

ゆえに　　$c=b-\dfrac{{}^{\text{エ}}3}{{}^{\text{オ}}4}$

したがって，① の方程式は　　$y=-\dfrac{1}{4}x^2+bx+b-\dfrac{3}{4}$

(1)　$f(x)=-\dfrac{1}{4}x^2+bx+b-\dfrac{3}{4}$ とおき，右辺を平方完成すると

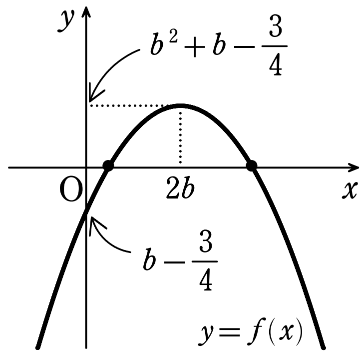
$$f(x)=-\frac{1}{4}(x-2b)^2+b^2+b-\frac{3}{4}$$

G は上に凸な放物線であるから，G と x 軸が異なる 2 点で交わる条件は

$$b^2+b-\frac{3}{4}>0$$

整理して因数分解すると　　$(2b+3)(2b-1)>0$

よって　　$b<\dfrac{{}^{\text{カキ}}-3}{{}^{\text{ク}}2}$，$\dfrac{{}^{\text{ケ}}1}{{}^{\text{コ}}2}<b$　……④



さらに，G と x 軸の正の部分が異なる 2 点で交わるとき

$f(0)<0$,　　　軸について　$2b>0$

$f(0)=b-\dfrac{3}{4}$ であるから，$f(0)<0$ より

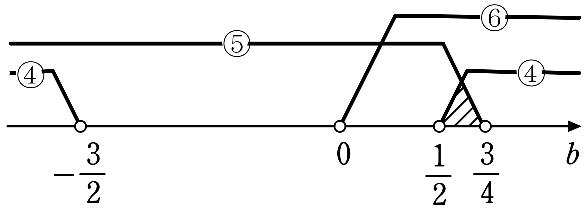
$b<\dfrac{3}{4}$　……⑤

また，軸について $2b>0$ より

$b>0$　……⑥

④，⑤，⑥ の共通範囲を求めて

$\dfrac{{}^{\text{サ}}1}{{}^{\text{シ}}2}<b<\dfrac{{}^{\text{ス}}3}{{}^{\text{セ}}4}$



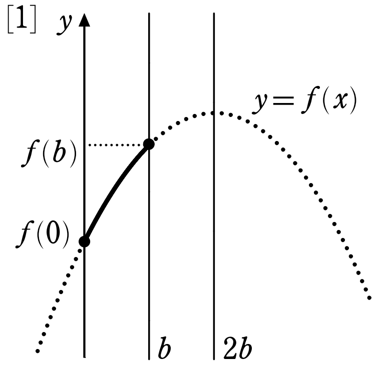
(2)　図 [1] のように，$0\leqq x\leqq b$ における $f(x)$ の最小値は　　$f(0)=b-\dfrac{3}{4}$

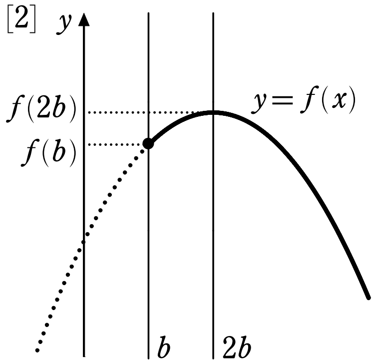
これが $-\dfrac{1}{4}$ のとき，$b-\dfrac{3}{4}=-\dfrac{1}{4}$ を解いて　　$b=\dfrac{{}^{\text{ソ}}1}{{}^{\text{タ}}2}$

また，図 [2] のように，$x \geqq b$ における $f(x)$ の最大値は　　$f(2b)=b^2+b-\dfrac{3}{4}$

これが 3 のとき，$b^2+b-\dfrac{3}{4}=3$ を整理して因数分解すると

$(2b+5)(2b-3)=0$　　　　$b>0$ であるから　　$b=\dfrac{{}^{チ}3}{{}^{ツ}2}$





$b=\dfrac{1}{2}$ のときの ① のグラフが G_1，$b=\dfrac{3}{2}$ のときの ① のグラフが G_2 であるから

$$G_1：y=-\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}=-\frac{1}{4}(x-1)^2$$

$$G_2：y=-\frac{1}{4}x^2+\frac{3}{2}x+\frac{3}{4}=-\frac{1}{4}(x-3)^2+3$$

よって，G_1 の頂点の座標は $(1,\ 0)$，G_2 の頂点の座標は $(3,\ 3)$ であるから，

G_1 を x 軸方向に ${}^{テ}2$，y 軸方向に ${}^{ト}3$ だけ平行移動すれば G_2 と一致する。