数学Ⅰ･A 第 1 問〔2〕

(1) 命題「$q \Longrightarrow p$」に対する反例とは，条件 q を満たし，かつ条件 p を満たさないものである。

[1] $a=0$，$b=0$ のとき

$(a+b)^2+(a-2b)^2=0$ であるから，条件 p を満たす。よって，反例ではない。

[2] $a=1$，$b=0$ のとき

$(a+b)^2+(a-2b)^2=1^2+1^2=2$ であるから，条件 p を満たす。

よって，反例ではない。

[3] $a=0$，$b=1$ のとき

$|a+b|=1$，$|a-2b|=2$ であるから，条件 q を満たさない。

よって，反例ではない。

[4] $a=1$，$b=1$ のとき

$|a+b|=2$，$|a-2b|=1$ であるから，条件 q を満たす。

また，$(a+b)^2+(a-2b)^2=2^2+(-1)^2=5$ であるから，条件 p を満たさない。

よって，反例である。

[1]～[4] から，命題「$q \Longrightarrow p$」に対する反例は　$a=1$，$b=1$　(チ ③)

(2) 条件 p の否定 $\overline{p}$ は　$\overline{p}$: $(a+b)^2+(a-2b)^2 \geqq 5$

条件 q の否定 $\overline{q}$ は　$\overline{q}$: $|a+b| \geqq 1$ かつ $|a-2b| \geqq 2$

命題「$p \Longrightarrow q$」の対偶は「$\overline{q} \Longrightarrow \overline{p}$」であるから　ツ ④，テ ⑦

(3) 命題「$p \Longrightarrow q$」の対偶「$\overline{q} \Longrightarrow \overline{p}$」が真であることを証明する。

(証明) 実数 a，b は条件 $|a+b| \geqq 1$，$|a-2b| \geqq 2$ を満たす。

これらの不等式の各辺は正であるから，2 乗してもそれぞれの不等式の不等号の向きは変わらない。

よって　$|a+b|^2 \geqq 1^2$，$|a-2b|^2 \geqq 2^2$　すなわち　$(a+b)^2 \geqq 1$，$(a-2b)^2 \geqq 4$

これらの辺々を加えて　$(a+b)^2+(a-2b)^2 \geqq 5$

ゆえに，実数 a，b は条件 $\overline{p}$ を満たすから，$\overline{q} \Longrightarrow \overline{p}$ は真である。(証明終)

よって，対偶「$\overline{q} \Longrightarrow \overline{p}$」が真であるから命題「$p \Longrightarrow q$」も真である。

一方，(1) より命題「$q \Longrightarrow p$」は，反例 $a=1$，$b=1$ が存在するから偽である。

以上から，p は q であるための十分条件であるが，必要条件ではない。　(ト ②)