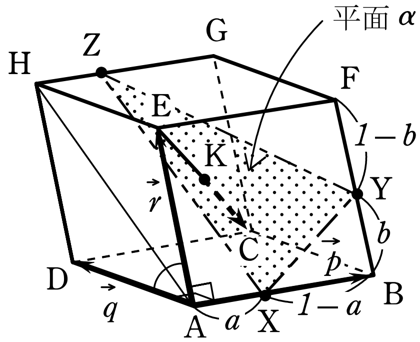
数学Ⅱ・B 第 4 問

(1)　$\angle\mathrm{EAB}=\angle\mathrm{DAB}=\dfrac{\pi}{2}$ であるから

$$\vec{p}\cdot\vec{q}=\vec{p}\cdot\vec{r}={}^{ア}0$$



また　$\vec{q}\cdot\vec{r}=|\vec{q}||\vec{r}|\cos\dfrac{\pi}{3}=1\cdot1\cdot\dfrac{1}{2}=\dfrac{{}^{イ}1}{{}^{ウ}2}$

点 X は辺 AB を $a:(1-a)$ に内分する点であり，点 Y は辺 BF を $b:(1-b)$ に内分する点であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{XY}}=\overrightarrow{\mathrm{XB}}+\overrightarrow{\mathrm{BY}}=(1-{}^{エ}a)\vec{p}+{}^{オ}b\vec{r}$$

また　$\overrightarrow{\mathrm{EC}}=\overrightarrow{\mathrm{EF}}+\overrightarrow{\mathrm{FG}}+\overrightarrow{\mathrm{GC}}=\vec{p}+\vec{q}-\vec{r}$,　$\overrightarrow{\mathrm{XZ}}=\overrightarrow{\mathrm{AH}}=\overrightarrow{\mathrm{AD}}+\overrightarrow{\mathrm{DH}}=\vec{q}+\vec{r}$

$\vec{p}\cdot\vec{q}=\vec{p}\cdot\vec{r}=0$ に注意して，$\overrightarrow{\mathrm{EC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{XZ}}$ を計算すると

$$\overrightarrow{\mathrm{EC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{XZ}}=(\vec{p}+\vec{q}-\vec{r})\cdot(\vec{q}+\vec{r})=\vec{p}\cdot(\vec{q}+\vec{r})+(\vec{q}-\vec{r})\cdot(\vec{q}+\vec{r})=|\vec{q}|^2-|\vec{r}|^2=1^2-1^2$$
$$={}^{カ}0$$

(2)　$\overrightarrow{\mathrm{EC}}$ は三角形 XYZ の 2 辺と垂直であり，(1) より，a，b の値にかかわらず常に $\overrightarrow{\mathrm{EC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{XZ}}=0$ が成り立つ。

よって，$\overrightarrow{\mathrm{EC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{XY}}=0$ が成り立つような a，b の条件を求めればよい。

ここで　$\overrightarrow{\mathrm{EC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{XY}}=(\vec{p}+\vec{q}-\vec{r})\cdot\{(1-a)\vec{p}+b\vec{r}\}=(1-a)|\vec{p}|^2+b\vec{q}\cdot\vec{r}-b|\vec{r}|^2$

$$=(1-a)\cdot1^2+b\cdot\frac{1}{2}-b\cdot1^2=1-a-\frac{b}{2}$$

よって　$1-a-\dfrac{b}{2}=0$　　すなわち　${}^{キ}2a+b={}^{ク}2$

$b=\dfrac{1}{2}$ のとき　$2a+\dfrac{1}{2}=2$　　すなわち　$a=\dfrac{{}^{ケ}3}{{}^{コ}4}$

$\overrightarrow{\mathrm{EK}}=c\overrightarrow{\mathrm{EC}}$ より　$\overrightarrow{\mathrm{AK}}=\overrightarrow{\mathrm{AE}}+c\overrightarrow{\mathrm{EC}}=\vec{r}+c(\vec{p}+\vec{q}-\vec{r})=c\vec{p}+c\vec{q}+(1-c)\vec{r}$　…… ①

一方，点 K は平面 α 上にあるから，$\overrightarrow{\mathrm{AK}}$ は実数 s，t を用いて

$$\overrightarrow{\mathrm{AK}}=\overrightarrow{\mathrm{AX}}+s\overrightarrow{\mathrm{XY}}+t\overrightarrow{\mathrm{XZ}}=\frac{3}{4}\vec{p}+s\left(\frac{1}{4}\vec{p}+\frac{1}{2}\vec{r}\right)+t(\vec{q}+\vec{r})$$
$$=\left(\frac{1}{{}^{サ}4}s+\frac{3}{4}\right)\vec{p}+t\vec{q}+\left(\frac{1}{{}^{シ}2}s+t\right)\vec{r}\quad\cdots\cdots\ ②$$　と表される。

$\vec{p}\neq\vec{0}$，$\vec{q}\neq\vec{0}$，$\vec{r}\neq\vec{0}$ で，$\vec{p}$，$\vec{q}$，$\vec{r}$ は同一平面上にないから，①，② より

$$c=\frac{1}{4}s+\frac{3}{4}\quad\cdots\cdots\ ③,\qquad c=t\quad\cdots\cdots\ ④,\qquad 1-c=\frac{1}{2}s+t\quad\cdots\cdots\ ⑤$$

③，④，⑤ を解くと　$c=\dfrac{{}^{ス}5}{{}^{セ}8}$，$s=-\dfrac{1}{2}$，$t=\dfrac{5}{8}$

よって　$|\overrightarrow{\mathrm{EK}}|=\left|\dfrac{5}{8}\overrightarrow{\mathrm{EC}}\right|=\dfrac{5}{8}|\overrightarrow{\mathrm{EC}}|$

ここで　$|\overrightarrow{\mathrm{EC}}|^2=|\vec{p}+\vec{q}-\vec{r}|^2=|\vec{p}|^2+|\vec{q}|^2+|\vec{r}|^2-2\vec{q}\cdot\vec{r}=1^2+1^2+1^2-2\cdot\frac{1}{2}=2$

$|\overrightarrow{\mathrm{EC}}|^2>0$ であるから　$|\overrightarrow{\mathrm{EC}}|=\sqrt{2}$　　したがって　$|\overrightarrow{\mathrm{EK}}|=\frac{{}^{\text{ソ}}5\sqrt{{}^{\text{タ}}2}}{{}^{\text{チ}}8}$