数学Ⅱ・B　第 3 問

(1)　第 4 群は $3\cdot4-2=10$ (個) の項からなるから　　$a_4=a_3+10=12+10={}^{\text{アイ}}22$

一般に，第 n 群は $(3n-2)$ 個の項からなるから

$$a_n-a_{n-1}={}^{\text{ウ}}3n-{}^{\text{エ}}2 \quad (n=2,\ 3,\ 4,\ \cdots\cdots)$$

よって　　$a_{n+1}-a_n=3(n+1)-2=3n+1 \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$

これは，数列 $\{a_n\}$ の階差数列の一般項が $3n+1$ であることを意味する。

ゆえに，$n\geqq2$ のとき

$$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}(3k+1)=1+3\cdot\frac{(n-1)\{(n-1)+1\}}{2}+(n-1)=\frac{3}{2}n^2-\frac{1}{2}n$$

初項は $a_1=1$ であるから，この式は $n=1$ のときにも成り立つ。

よって　　$a_n=\dfrac{{}^{\text{オ}}3}{{}^{\text{カ}}2}n^{{}^{\text{キ}}2}-\dfrac{{}^{\text{ク}}1}{{}^{\text{ケ}}2}n \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$

変形すると　　$a_n=\dfrac{1}{2}n(3n-1)$　　…… ①

$n=20,\ 21$ を ① に代入すると　　$a_{20}=590,\ a_{21}=651$

$590<600<651$ であるから，600 は第 ${}^{\text{コサ}}21$ 群の項であり，小さい方から

$600-590={}^{\text{シス}}10$ 番目の項である。

(2)　第 $(n+1)$ 群の小さい方から $2n$ 番目の項は，第 n 群の最後の項より $2n$ だけ大きい

自然数であるから　　$b_n=a_n+2n=\dfrac{3}{2}n^2-\dfrac{1}{2}n+2n=\dfrac{{}^{\text{セ}}3}{{}^{\text{ソ}}2}n^{{}^{\text{タ}}2}+\dfrac{{}^{\text{チ}}3}{{}^{\text{ツ}}2}n$

$$=\frac{3}{2}n(n+1)$$

よって　　$\dfrac{1}{b_n}=\dfrac{1}{\dfrac{3}{2}n(n+1)}=\dfrac{{}^{\text{テ}}2}{{}^{\text{ト}}3}\left(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+{}^{\text{ナ}}1}\right)$

ゆえに　　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{b_k}=\sum_{k=1}^{n}\frac{2}{3}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$

$$=\frac{2}{3}\left\{\left(\frac{1}{1}-\cancel{\frac{1}{2}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{2}}-\cancel{\frac{1}{3}}\right)+\cdots\cdots+\left(\cancel{\frac{1}{n}}-\frac{1}{n+1}\right)\right\}$$

$$=\frac{2}{3}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=\frac{2}{3}\cdot\frac{n}{n+1}=\frac{{}^{\text{ニ}}2n}{{}^{\text{ヌ}}3n+{}^{\text{ネ}}3} \qquad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$$