数学Ⅱ・B 第 2 問

(1)　$y=-x^3+9x^2+kx$ から　　$y'=-3x^2+18x+k$

よって，点 $\mathrm{Q}\,(t,\ -t^3+9t^2+kt)$ における C の接線の方程式は

$$y-(-t^3+9t^2+kt)=(-3t^2+18t+k)(x-t)$$

これが点 $\mathrm{P}(1,\ 0)$ を通るから　　$0-(-t^3+9t^2+kt)=(-3t^2+18t+k)(1-t)$

整理すると　　$-{}^{\text{ア}}2t^3+{}^{\text{イウ}}12t^2-{}^{\text{エオ}}18t=k$

$p(t)=-2t^3+12t^2-18t$ とおくと　　$p'(t)=-6t^2+24t-18=-6(t-1)(t-3)$

$p'(t)=0$ とすると　　$t=1,\ 3$

よって，関数 $p(t)$ の増減表は右のようになる。

t	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$
$p'(t)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$p(t)$	↘	極小	↗	極大	↘

ゆえに，関数 $p(t)$ は

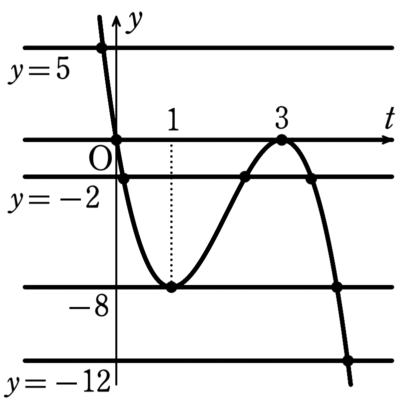
$t={}^{\text{カ}}1$ で極小値 $p(1)=-2\cdot1^3+12\cdot1^2-18\cdot1={}^{\text{キク}}-8$ をとり，

$t={}^{\text{ケ}}3$ で極大値 $p(3)=-2\cdot3^3+12\cdot3^2-18\cdot3={}^{\text{コ}}0$　　をとる。

ここで，点 P を通る C の接線の本数は，$y=p(t)$ のグラフと直線 $y=k$ との共有点の個数に等しい。

ゆえに，接線の本数が 2 本となるための条件は，$y=p(t)$ のグラフと直線 $y=k$ が相異なる 2 つの共有点をもつことであり，このとき，右の図から

$$k={}^{\text{サ}}0,\ {}^{\text{シス}}-8$$



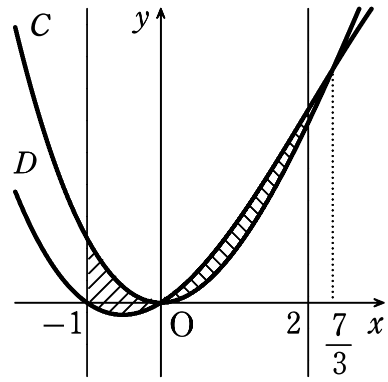
同様に考えて，右の図から，点 P を通る接線の本数は $k=5$ のとき ${}^{\text{セ}}1$ 本，$k=-2$ のとき ${}^{\text{ソ}}3$ 本，$k=-12$ のとき ${}^{\text{タ}}1$ 本である。

(2)　$k=0$ のとき，C の方程式は　　$y=-x^3+9x^2$

C と D の共有点の x 座標を求めると，$-x^3+9x^2=-x^3+6x^2+7x$ から　$3x^2-7x=0$

すなわち　　$x(3x-7)=0$　　　　よって　　$x={}^{\text{チ}}0,\ \dfrac{{}^{\text{ツ}}7}{{}^{\text{テ}}3}$

ゆえに，求める面積は，右の図の斜線部分の面積であり



$$\int_{-1}^{0}\{(-x^3+9x^2)-(-x^3+6x^2+7x)\}\,dx$$

$$+\int_{0}^{2}\{(-x^3+6x^2+7x)-(-x^3+9x^2)\}\,dx$$

$$=\int_{-1}^{0}(3x^2-7x)\,dx+\int_{0}^{2}(-3x^2+7x)\,dx$$

$$=\left[x^3-\frac{7}{2}x^2\right]_{-1}^{0}+\left[-x^3+\frac{7}{2}x^2\right]_{0}^{2}$$

$$=-\left\{(-1)^3-\frac{7}{2}\cdot(-1)^2\right\}+-2^3+\frac{7}{2}\cdot2^2=\frac{{}^{\text{トナ}}21}{{}^{\text{ニ}}2}$$