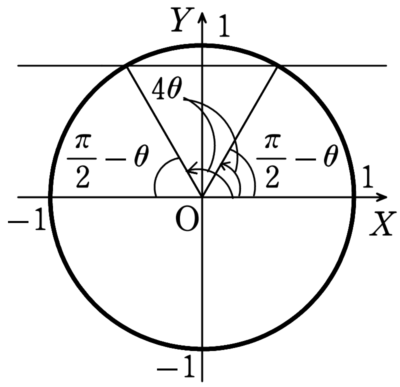
数学Ⅱ・B　第 1 問〔2〕

一般に，すべての x について　$\cos x=\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)$　　ゆえに　${}^{\text{シ}}$①



よって，① は　$\sin 4\theta=\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta\right)$

$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ であるから　$0<4\theta<2\pi$，$0<\dfrac{\pi}{2}-\theta<\dfrac{\pi}{2}$

ゆえに　$4\theta=\dfrac{\pi}{2}-\theta$　または　$4\theta=\pi-\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta\right)$

すなわち　$\theta=\dfrac{\pi}{{}^{\text{セソ}}10}$　または　$\theta=\dfrac{\pi}{{}^{\text{ス}}6}$

ここで　$\sin\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{{}^{\text{タ}}1}{{}^{\text{チ}}2}$

また，$\sin 4\theta=2\sin 2\theta\cos 2\theta$ であるから，① は　${}^{\text{ツ}}2\sin 2\theta\cos 2\theta=\cos\theta$

この左辺に $\sin 2\theta=2\sin\theta\cos\theta$，$\cos 2\theta=1-2\sin^2\theta$ を代入して，整理すると

$$({}^{\text{テ}}4\sin\theta-{}^{\text{ト}}8\sin^3\theta)\cos\theta=\cos\theta$$

$\cos\theta>0$ であるから，両辺を $\cos\theta$ で割って整理すると

$$8\sin^3\theta-4\sin\theta+1=0 \quad \cdots\cdots \text{②}$$

$\sin\theta=\dfrac{1}{2}$ が ② を満たすことから，② の左辺は $2\sin\theta-1$ を因数にもつことがわかる。

よって　$(2\sin\theta-1)(4\sin^2\theta+2\sin\theta-1)=0$

$\theta=\dfrac{\pi}{10}$ のとき，$\sin\theta\neq\dfrac{1}{2}$ であるから　${}^{\text{ナ}}4\sin^2\theta+{}^{\text{ニ}}2\sin\theta-1=0$

これを解くと　$\sin\theta=\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{4}$

$\sin\dfrac{\pi}{10}>0$ であるから　$\sin\dfrac{\pi}{10}=\dfrac{{}^{\text{ヌネ}}-1+\sqrt{{}^{\text{ノ}}5}}{{}^{\text{ハ}}4}$