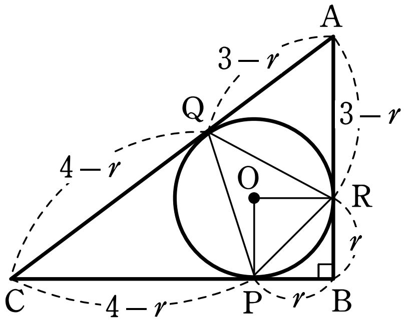
数学Ⅰ・A　第３問

(1)　内接円 O の半径を r とすると

$$BP=BR=r$$

よって　$AR=AQ=3-r$,

$$CP=CQ=4-r$$



$AQ+CQ=AC$ であるから　$(3-r)+(4-r)=5$

ゆえに　$r={}^{\text{ア}}1$

よって　$AR=AQ=2$,　$CP=CQ=3$

また，△ABC は直角三角形であるから

$$\cos\angle CAB=\frac{AB}{CA}=\frac{3}{5}$$

ゆえに，△AQR において，余弦定理により

$$QR^2=AQ^2+AR^2-2AQ\cdot AR\cos\angle CAB$$

$$=2^2+2^2-2\cdot2\cdot2\cdot\frac{3}{5}=\frac{16}{5}$$

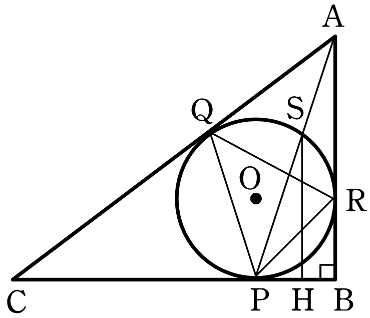
$QR>0$ であるから　$QR=\dfrac{{}^{\text{イ}}4\sqrt{{}^{\text{ウ}}5}}{{}^{\text{エ}}5}$

また，円 O は △PQR の外接円であるから，正弦定理により　$\dfrac{QR}{\sin\angle QPR}=2r$

ゆえに　$\sin\angle QPR=\dfrac{QR}{2r}=\dfrac{{}^{\text{オ}}2\sqrt{{}^{\text{カ}}5}}{{}^{\text{キ}}5}$

(2)　△APB は直角三角形であるから，三平方の定理により

$$AP=\sqrt{AB^2+BP^2}=\sqrt{3^2+1^2}=\sqrt{{}^{\text{クケ}}10}$$



また，方べきの定理により

$$AR^2=AS\cdot AP$$

よって　$AS=\dfrac{AR^2}{AP}=\dfrac{4}{\sqrt{10}}=\dfrac{2\sqrt{10}}{5}$

ゆえに　$SP=AP-AS=\sqrt{10}-\dfrac{2\sqrt{10}}{5}$

$$=\frac{{}^{\text{コ}}3\sqrt{{}^{\text{サシ}}10}}{{}^{\text{ス}}5}$$

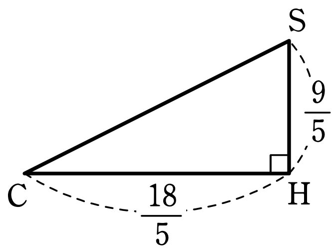
したがって　$AP:SP=5:3$

線分 SH は S から BC に下ろした垂線であるから　$SH /\!/ AB$

よって　$BP:HP=5:3$,　$AB:SH=5:3$

$BP=1$，$AB=3$ であるから

$$HP=\frac{3}{5}BP=\frac{{}^{\text{セ}}3}{{}^{\text{ソ}}5},\quad SH=\frac{3}{5}AB=\frac{{}^{\text{タ}}9}{{}^{\text{チ}}5}$$



ゆえに　$CH=CP+HP=3+\dfrac{3}{5}=\dfrac{18}{5}$

したがって　$\tan\angle BCS=\tan\angle HCS=\dfrac{SH}{CH}=\dfrac{{}^{\text{ツ}}1}{{}^{\text{テ}}2}$

(3)　線分 RT は円 O の直径であるから　　$RT /\!/ BC$

よって，T から線分 BC に垂線 TH′ を下ろすと

$$TH' = 1,\quad CH' = BC - BH' = 4 - 2 = 2$$

ゆえに　　$\tan\angle BCT = \tan\angle H'CT$

$$= \frac{TH'}{CH'} = \frac{{}^{ト}1}{{}^{ナ}2}$$

よって，(2) より $\tan\angle BCS = \tan\angle BCT$ であるから，

3 点 C，T，S は一直線上にある。

したがって　$\angle RSC = \angle RST = {}^{ニヌ}90^\circ$

$$\angle PSC = \angle PST = \frac{1}{2}\angle POT = {}^{ネノ}45^\circ$$