

# 数学 I・A 第 1 問 [2]

(ケ) 命題「 $p$ かつ $r$ 」 $\Rightarrow$  $q$ は真である。

(証明) 条件  $p$  より,  $n=5l+1$  ( $l$  は 0 以上の整数) とおける。

また, 条件  $r$  より,  $n=2m+1$  ( $m$  は 0 以上の整数) とおける。

$$5l+1=2m+1 \text{ とすると } 5l=2m$$

2 と 5 は互いに素であるから,  $l$  は 2 の倍数, すなわち 偶数である。

ゆえに,  $n=5 \cdot 2k+1=10k+1$  ( $k$  は 0 以上の整数) とおける。

よって,  $n$  は条件  $q$  を満たす。(証明終)

また, 命題  $q \Rightarrow$  「 $p$ かつ $r$ 」も真である。

(証明) 条件  $q$  より,  $n=10k+1$  ( $k$  は 0 以上の整数) とおける。

$n=10k+1=5 \cdot 2k+1$  であるから,  $n$  は条件  $p$  を満たす。

$n=10k+1=2 \cdot 5k+1$  であるから,  $n$  は条件  $r$  を満たす。(証明終)

したがって, 「 $p$ かつ $r$ 」は  $q$  であるための必要十分条件である。(ケ ⑩)

(コ) 2 より大きい素数はすべて奇数である。

よって, 命題  $s \Rightarrow r$  は真である。

一方, 命題  $r \Rightarrow s$  は偽である。(反例:  $n=9$ )

ゆえに, それぞれの命題の対偶を考えると,

$$\text{命題 } \bar{r} \Rightarrow \bar{s} \text{ は真, 命題 } \bar{s} \Rightarrow \bar{r} \text{ は偽 である。}$$

したがって,  $\bar{r}$  は  $\bar{s}$  であるための十分条件であるが, 必要条件でない。(コ ⑩)

(サ) 命題「 $p$ かつ $s$ 」 $\Rightarrow$ 「 $q$ かつ $s$ 」は真である。

(証明) 条件  $p$  を満たす自然数は次の ①, ② のいずれかを満たす。

「10 で割ると 1 余る」…… ①, 「10 で割ると 6 余る」…… ②

① を満たす数は奇数, ② を満たす数は偶数である。

また, 条件  $s$  を満たす数  $n$  は, 2 より大きい素数で, これは奇数である。

よって, 「 $p$ かつ $s$ 」を満たす数  $n$  は, 「①かつ $s$ 」を満たす数である。

すなわち, 「 $q$ かつ $s$ 」を満たす数である。(証明終)

また, 命題「 $q$ かつ $s$ 」 $\Rightarrow$ 「 $p$ かつ $s$ 」も真である。

(証明) 条件  $q$  を満たす数は  $n=10k+1$  ( $k$  は 0 以上の整数) とおける。

$n=5 \cdot 2k+1$  であるから,  $n$  は条件  $p$  を満たす数である。

よって, 「 $q$ かつ $s$ 」を満たす数  $n$  は, 「 $p$ かつ $s$ 」を満たす数である。(証明終)

ゆえに, 「 $p$ かつ $s$ 」は「 $q$ かつ $s$ 」であるための必要十分条件である。(サ ⑩)

(シ)  $P=\{n \mid n \text{ は } 5 \text{ で割ると } 1 \text{ 余る数}\},$

$R=\{n \mid n \text{ は奇数}\},$

$S=\{n \mid n \text{ は } 2 \text{ より大きい素数}\}$  である。

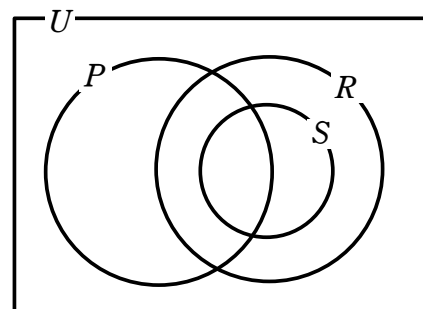
2 より大きい素数はすべて奇数であるから

$$R \supset S$$

$n=11$  は 5 で割ると 1 余る素数であるから,

$P$  と  $S$  は共通部分をもつ。

よって,  $P, R, S$  の関係を表す図は右のようになる。(シ ⑩)



【参考】 条件  $q$  を満たす自然数全体の集合を  $Q$  とし、集合  $P, Q, R, S$  の関係を図で表すと、右のようになる。

よって、(ケ), (コ), (サ) について、集合の包含関係で考えると次のようになる。

- (ケ)  $P \cap R = Q$  であるから、「 $p$  かつ  $r$ 」は  $q$  であるための必要十分条件である。
- (コ)  $\overline{R} \subset \overline{S}$  であるから、 $\overline{r}$  は  $\overline{s}$  であるための十分条件であるが、必要条件でない。
- (サ)  $P \cap S = Q \cap S$  であるから、「 $p$  かつ  $s$ 」は「 $q$  かつ  $s$ 」であるための必要十分条件である。

