数学Ⅱ・B 第 4 問

(1) $\overrightarrow{\mathrm{BC}}=(-1,\ 2,\ 0)$，$\overrightarrow{\mathrm{BA}}=(-1,\ 0,\ 1)$ であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{BC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BA}}=(-1)\cdot(-1)+2\cdot0+0\cdot1={}^{\text{ア}}1$$

また $|\overrightarrow{\mathrm{BC}}|=\sqrt{(-1)^2+2^2+0^2}=\sqrt{5}$，$|\overrightarrow{\mathrm{BA}}|=\sqrt{(-1)^2+0^2+1^2}=\sqrt{2}$

よって $\cos\angle\mathrm{ABC}=\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{BC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BA}}}{|\overrightarrow{\mathrm{BC}}||\overrightarrow{\mathrm{BA}}|}=\dfrac{1}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{2}}=\dfrac{1}{\sqrt{10}}$

$0^\circ<\angle\mathrm{ABC}<180^\circ$ であるから

$$\sin\angle\mathrm{ABC}=\sqrt{1-\cos^2\angle\mathrm{ABC}}=\sqrt{1-\left(\frac{1}{\sqrt{10}}\right)^2}=\frac{3}{\sqrt{10}}$$

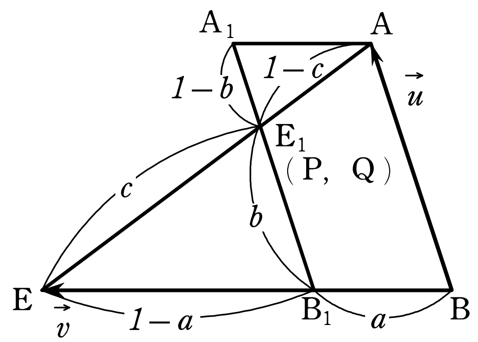
よって $\triangle\mathrm{ABC}=\dfrac{1}{2}|\overrightarrow{\mathrm{BC}}||\overrightarrow{\mathrm{BA}}|\sin\angle\mathrm{ABC}=\dfrac{1}{2}\cdot\sqrt{5}\cdot\sqrt{2}\cdot\dfrac{3}{\sqrt{10}}=\dfrac{{}^{\text{イ}}3}{{}^{\text{ウ}}2}$

参考 （$\triangle\mathrm{ABC}$ の面積）

$\triangle\mathrm{ABC}$ の面積は次の式で求められる。

$$\triangle\mathrm{ABC}=\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{\mathrm{BC}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{BA}}|^2-(\overrightarrow{\mathrm{BC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BA}})^2}=\frac{1}{2}\sqrt{(\sqrt{5})^2\cdot(\sqrt{2})^2-1^2}=\frac{{}^{\text{イ}}3}{{}^{\text{ウ}}2}$$

(2) $\overrightarrow{\mathrm{BB_1}}=a\overrightarrow{\mathrm{BE}}={}^{\text{エ}}a\vec{v}$



点 P は線分 $\mathrm{A_1B_1}$ 上にあるから，$0\leqq b\leqq1$ を満たす b を用いて $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{BB_1}}+b\overrightarrow{\mathrm{B_1A_1}}$ と表される。

$\overrightarrow{\mathrm{B_1A_1}}=\overrightarrow{\mathrm{BA}}$ であるから

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OP}}&=\overrightarrow{\mathrm{OB}}+b\overrightarrow{\mathrm{BA}}+\overrightarrow{\mathrm{BB_1}}\\&=\overrightarrow{\mathrm{OB}}+b\vec{u}+a\vec{v}\quad\cdots\cdots①\end{aligned}$$

また，点 Q は線分 AE 上にあるから，$\mathrm{AQ}:\mathrm{QE}=(1-c):c\ (0\leqq c\leqq1)$ とすると

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OQ}}&=\overrightarrow{\mathrm{OB}}+c\overrightarrow{\mathrm{BA}}+(1-c)\overrightarrow{\mathrm{BE}}\\&=\overrightarrow{\mathrm{OB}}+{}^{\text{オ}}c\vec{u}+({}^{\text{カ}}1-c)\vec{v}\quad\cdots\cdots②\end{aligned}$$

$\overrightarrow{\mathrm{OB}}\neq\vec{0}$，$\vec{u}\neq\vec{0}$，$\vec{v}\neq\vec{0}$ で，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\vec{u}$，$\vec{v}$ は同一平面上にないから，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ が一致するとき，①，②より $b=c$，$a=1-c$

よって $b={}^{\text{キ}}c={}^{\text{クケ}}-a+1$

ゆえに，線分 $\mathrm{A_1B_1}$ と AE は交わるから，その交点を $\mathrm{E_1}$ とすると

$$\mathrm{AE_1}:\mathrm{E_1E}=(1-c):c={}^{\text{コ}}a:(1-a)$$

同様に，点 $\mathrm{C_1}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OC_1}}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}+\overrightarrow{\mathrm{BB_1}}$ で定めると，線分 $\mathrm{A_1C_1}$ と AD は交わるから，その交点を $\mathrm{D_1}$ とする。

$$\mathrm{AD_1}:\mathrm{D_1D}={}^{\text{サ}}a:(1-a)$$

ゆえに $\overrightarrow{\mathrm{D_1E_1}}=\overrightarrow{\mathrm{AE_1}}-\overrightarrow{\mathrm{AD_1}}=a\overrightarrow{\mathrm{AE}}-a\overrightarrow{\mathrm{AD}}=a(\overrightarrow{\mathrm{AE}}-\overrightarrow{\mathrm{AD}})={}^{\text{シ}}a\overrightarrow{\mathrm{DE}}\quad\cdots\cdots③$

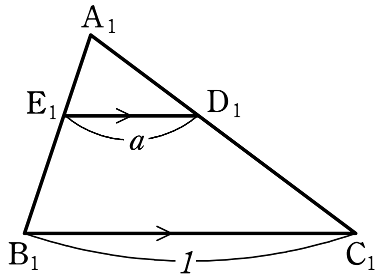
$\triangle A_1B_1C_1$ は $\triangle ABC$ を平行移動したものであるから

$$\triangle A_1B_1C_1=\triangle ABC=\frac{3}{2}$$

③ より　$D_1E_1 /\!/ DE,\ D_1E_1 : DE = a : 1$

また，$\overrightarrow{C_1B_1}=\overrightarrow{DE}$ であるから　$D_1E_1 /\!/ C_1B_1$

$D_1E_1 : C_1B_1 = a : 1$



ゆえに，$\triangle A_1E_1D_1 \backsim \triangle A_1B_1C_1$ であり，相似比は $a:1$ である。

したがって，四角形 $B_1C_1D_1E_1$ の面積は

$$\triangle A_1B_1C_1-\triangle A_1E_1D_1$$

$$=(1^2-a^2)\triangle A_1B_1C_1=\frac{{}^{ス}3}{{}^{セ}2}\left({}^{ソ}1-{}^{タ}a^{{}^{チ}2}\right)$$

また，$BB_1 : B_1E = a : (1-a)$ であるから

$$\overrightarrow{OB_1}=(1-a)\overrightarrow{OB}+a\overrightarrow{OE}=(1-a)(1,\ 0,\ 0)+a(0,\ -2,\ 0)=(1-a,\ -2a,\ 0)$$

$AD_1 : D_1D = a : (1-a)$ であるから

$$\overrightarrow{OD_1}=(1-a)\overrightarrow{OA}+a\overrightarrow{OD}=(1-a)(0,\ 0,\ 1)+a(-1,\ 0,\ 0)=(-a,\ 0,\ 1-a)$$

よって　$\overrightarrow{B_1D_1}=\overrightarrow{OD_1}-\overrightarrow{OB_1}$

$$=(-a,\ 0,\ 1-a)-(1-a,\ -2a,\ 0)$$

$$=(-1,\ 2a,\ 1-a)$$

したがって　$\left|\overrightarrow{B_1D_1}\right|=\sqrt{(-1)^2+(2a)^2+(1-a)^2}$

$$=\sqrt{{}^{ツ}5a^2-{}^{テ}2a+{}^{ト}2}$$

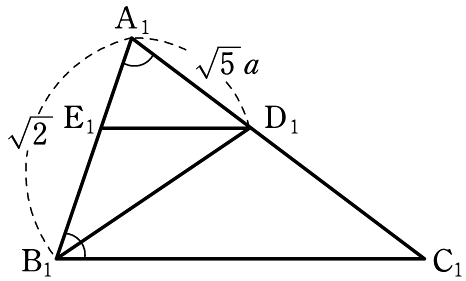
別解

$\triangle A_1B_1C_1$ は $C_1A_1=C_1B_1=\sqrt{5}$，

$A_1B_1=\sqrt{2}$ の二等辺三角形である。

よって　$\angle B_1A_1C_1=\angle A_1B_1C_1=\angle ABC$

ゆえに，$\triangle A_1B_1D_1$ について，余弦定理より



$$B_1D_1{}^2=(\sqrt{2})^2+(\sqrt{5}\,a)^2-2\sqrt{2}\cdot\sqrt{5}\,a\cos\angle B_1A_1C_1$$

$$=2+5a^2-2\sqrt{10}\,a\cdot\frac{1}{\sqrt{10}}$$

$$=5a^2-2a+2$$

したがって　$\left|\overrightarrow{B_1D_1}\right|=B_1D_1=\sqrt{{}^{ツ}5a^2-{}^{テ}2a+{}^{ト}2}$