数学Ⅱ・B　第３問

(1)　$\{a_n\}$ は，初項が１，公比が $\dfrac{1}{3}$ の等比数列であるから　　$a_n=1\cdot\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}=\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}$

よって　　$b_n=a_{2n}=\left(\dfrac{1}{3}\right)^{2n-1}=\dfrac{1}{3}\cdot\left(\dfrac{1}{3}\right)^{2(n-1)}=\dfrac{1}{3}\cdot\left(\dfrac{1}{9}\right)^{n-1}$

ゆえに，$\{b_n\}$ は，初項が $\dfrac{^{ア}1}{^{イ}3}$，公比が $\dfrac{^{ウ}1}{^{エ}9}$ の等比数列である。

したがって　　$T_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}b_k=\dfrac{\dfrac{1}{3}\left\{1-\left(\dfrac{1}{9}\right)^n\right\}}{1-\dfrac{1}{9}}=\dfrac{^{オ}3}{^{カ}8}\left(1-\dfrac{^{キ}1}{^{ク}9^n}\right)$

また　　$b_1b_2\cdots\cdots b_n=\dfrac{1}{3}\cdot\left(\dfrac{1}{3}\right)^3\cdot\cdots\cdots\cdot\left(\dfrac{1}{3}\right)^{2n-1}=\left(\dfrac{1}{3}\right)^{1+3+\cdots\cdots+(2n-1)}$

$$=\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{n\{1+(2n-1)\}}{2}}=\left(\frac{1}{3}\right)^{n^2}=\frac{^{ケ}1}{^{コ}3^{n^2}}$$

(2)　$c_n=2n\cdot b_n$ より　　$c_{n+1}=2(n+1)\cdot b_{n+1}=2(n+1)\cdot\dfrac{1}{9}b_n=\dfrac{1}{9}(2n\cdot b_n+2b_n)$

$$=\frac{1}{9}(c_n+2b_n)$$

よって　　$^{サ}9c_{n+1}-c_n={}^{シ}2b_n$　　　$(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$

ゆえに　　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(9c_{k+1}-c_k)=\sum_{k=1}^{n}2b_k$

よって　　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(9c_{k+1}-c_k)=2T_n$　　$\cdots\cdots$ ①

また，この左辺の和をまとめ直すと

$$\sum_{k=1}^{n}(9c_{k+1}-c_k)=9\sum_{k=1}^{n}c_{k+1}-\sum_{k=1}^{n}c_k=9\sum_{k=2}^{n+1}c_k-\sum_{k=1}^{n}c_k$$

$$=9\left(\sum_{k=1}^{n}c_k+c_{n+1}-c_1\right)-\sum_{k=1}^{n}c_k=8\sum_{k=1}^{n}c_k+9c_{n+1}-9c_1$$

$$={}^{ス}8U_n+{}^{セ}9c_{n+1}-{}^{ソ}9c_1\quad\cdots\cdots ②$$

①，② より　　$8U_n+9c_{n+1}-9c_1=2T_n$

よって　　$U_n=\dfrac{1}{8}(2T_n-9c_{n+1}+9c_1)$

$$=\frac{1}{8}\left\{2\cdot\frac{3}{8}\left(1-\frac{1}{9^n}\right)-9\cdot2(n+1)\left(\frac{1}{3}\right)^{2(n+1)-1}+9\cdot2\cdot\frac{1}{3}\right\}$$

$$=\frac{1}{8}\left\{\frac{3}{4}\left(1-\frac{1}{9^n}\right)-6(n+1)\frac{1}{9^n}+6\right\}$$

$$=\frac{^{タチ}27}{^{ツテ}32}-\frac{^{トナ}24n+{}^{ニヌ}27}{32}\cdot\frac{1}{^{ネ}9^n}$$