数学Ⅱ・B　第 2 問

点 P$(x,\ y)$ は，点 Q$(u,\ v)$ に関して点 A と対称な点であるから，線分 AP の中点が Q である。

よって　$u=\dfrac{x+{}^{\text{ア}}1}{{}^{\text{イ}}2}$，$v=\dfrac{y-{}^{\text{ウ}}2}{{}^{\text{エ}}2}$　…… ①

Q が C 上を動くとき　$v=2u^2$

① を代入すると　$\dfrac{y-2}{2}=2\cdot\left(\dfrac{x+1}{2}\right)^2$　これを整理すると　$y=x^2+{}^{\text{オ}}2x+{}^{\text{カ}}3$

$2x^2=x^2+2x+3$ とすると　$x^2-2x-3=0$

すなわち　$(x+1)(x-3)=0$　ゆえに　$x=-1,\ 3$

よって，点 R，S の x 座標はそれぞれ　${}^{\text{キク}}-1$，${}^{\text{ケ}}3$

また，点 R，S の y 座標はそれぞれ　$2\cdot(-1)^2=2$，　$2\cdot3^2=18$

$y=x^2+2x+3$ について　$y'=2x+2$

よって，点 R における接線の方程式は

$y-2=\{2\cdot(-1)+2\}\{x-(-1)\}$　すなわち　$y={}^{\text{コ}}2$

点 S における接線の方程式は

$y-18=(2\cdot3+2)(x-3)$　すなわち　$y={}^{\text{サ}}8x-{}^{\text{シ}}6$

点 P の座標は　$(a,\ a^2+2a+3)$

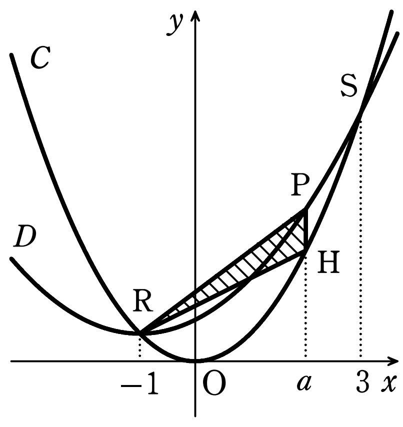
点 H の座標は　$(a,\ 2a^2)$

よって，△PHR の面積 $S(a)$ は

$$S(a)=\frac{1}{2}\{(a^2+2a+3)-2a^2\}\{a-(-1)\}$$

$$=\frac{1}{2}(-a^2+2a+3)(a+1)$$

$$=\frac{1}{{}^{\text{ス}}2}({}^{\text{セ}}-a^3+a^2+{}^{\text{ソ}}5a+{}^{\text{タ}}3)$$



また　$S'(a)=\dfrac{1}{2}(-3a^2+2a+5)$

$$=-\frac{1}{2}(a+1)(3a-5)$$

$S'(a)=0$ とすると　$a=-1,\ \dfrac{5}{3}$

$-1<a<3$ における $S(a)$ の増減表は，右のようになる。

a	-1	$\cdots$	$\frac{5}{3}$	$\cdots$	3
$S'(a)$		$+$	0	$-$	
$S(a)$		↗	極大	↘	

よって，$S(a)$ は $a=\dfrac{{}^{\text{チ}}5}{{}^{\text{ツ}}3}$ のとき，最大値をとる。

$a=\dfrac{5}{3}$ のとき，点 H の座標は　$\left(\dfrac{5}{3},\ \dfrac{50}{9}\right)$

よって，直線 HR の方程式は　　$y-2=\dfrac{\dfrac{50}{9}-2}{\dfrac{5}{3}-(-1)}\{x-(-1)\}$

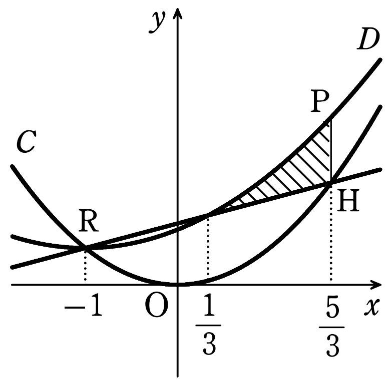
すなわち　　$y=\dfrac{4}{3}x+\dfrac{10}{3}$

$x^2+2x+3=\dfrac{4}{3}x+\dfrac{10}{3}$ とすると　　$3x^2+2x-1=0$

すなわち　　$(3x-1)(x+1)=0$　　　ゆえに　　$x=\dfrac{1}{3}$，-1

よって，直線 HR と放物線 D の交点のうち，R と異なる点の x 座標は　　$\dfrac{{}^{\text{テ}}1}{{}^{\text{ト}}3}$

求める面積は



$$\int_{\frac{1}{3}}^{\frac{5}{3}}\left\{x^2+2x+3-\left(\frac{4}{3}x+\frac{10}{3}\right)\right\}dx$$

$$=\int_{\frac{1}{3}}^{\frac{5}{3}}\left(x^2+\frac{2}{3}x-\frac{1}{3}\right)dx=\left[\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{3}x^2-\frac{1}{3}x\right]_{\frac{1}{3}}^{\frac{5}{3}}$$

$$=\frac{1}{3}\left[x^3+x^2-x\right]_{\frac{1}{3}}^{\frac{5}{3}}$$

$$=\frac{1}{3}\left[\left\{\left(\frac{5}{3}\right)^3+\left(\frac{5}{3}\right)^2-\frac{5}{3}\right\}-\left\{\left(\frac{1}{3}\right)^3+\left(\frac{1}{3}\right)^2-\frac{1}{3}\right\}\right]=\frac{{}^{\text{ナニヌ}}160}{{}^{\text{ネノ}}81}$$