数学Ⅰ・A　第3問

△ABC において，余弦定理により

$$\cos\angle CAB=\frac{AB^2+AC^2-BC^2}{2AB\cdot AC}=\frac{1^2+2^2-(\sqrt{7})^2}{2\cdot1\cdot2}=-\frac{1}{2}$$

よって　　$\angle CAB={}^{\text{アイウ}}120^\circ$

直線 AD は ∠CAB の二等分線であるから　　$BD:CD=AB:AC=1:2$

よって　　$BD=\dfrac{1}{1+2}BC=\dfrac{\sqrt{{}^{\text{エ}}7}}{{}^{\text{オ}}3}$，　$CD=\dfrac{2}{1+2}BC=\dfrac{{}^{\text{カ}}2\sqrt{{}^{\text{キ}}7}}{{}^{\text{ク}}3}$

また　　$\angle DAB=\angle DAC=60^\circ$

∠DBE，∠DAC は $\overset{\frown}{EC}$ に対する円周角であるから

$\angle DBE=\angle DAC=60^\circ$　…… ①

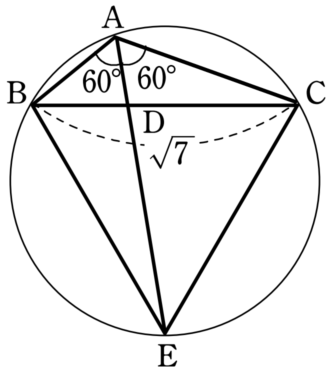
円に内接する四角形の対角の和は 180° であるから

$\angle BEC=180^\circ-\angle CAB=60^\circ$

よって，∠DABと等しい角は　　∠DBE，∠BEC

すなわち　　ケ ⓪，コ ④　（または　ケ ④，コ ⓪ ）

ゆえに，∠CBE＝∠BEC＝∠ECB であるから，△BCE は正三角形である。よって　　$BE=\sqrt{{}^{\text{サ}}7}$



また，△DBE と △DAC において

$\angle BDE=\angle ADC$（対頂角）　…… ②

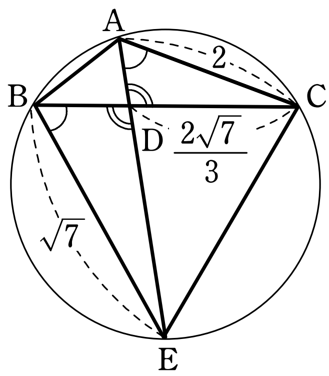
よって，①，② より，2組の角がそれぞれ等しいから

$\triangle DBE\backsim\triangle DAC$

ゆえに　　$BE:AC=DE:DC$

すなわち $\sqrt{7}:2=DE:\dfrac{2\sqrt{7}}{3}$　であるから

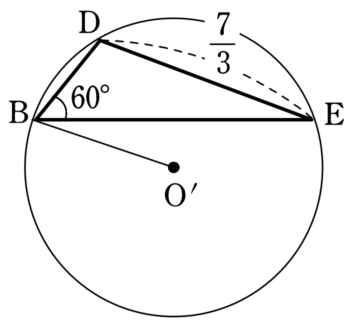
$$DE=\frac{{}^{\text{シ}}7}{{}^{\text{ス}}3}$$



一方，△DBE の外接円の中心 O′ において，O′B は外接円の半径であるから，正弦定理により

$$\frac{DE}{\sin\angle DBE}=2O'B$$

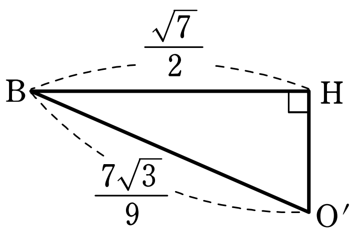
すなわち　　$O'B=\dfrac{\dfrac{7}{3}}{2\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}}=\dfrac{{}^{\text{セ}}7\sqrt{{}^{\text{ソ}}3}}{{}^{\text{タ}}9}$



O′ から辺 BE に下ろした垂線を O′H とすると

$$BH=\frac{1}{2}BE=\frac{\sqrt{7}}{2}$$

△BHO′ は直角三角形であるから， 三平方の定理により



$$\mathrm{O'H}=\sqrt{\mathrm{O'B}^2-\mathrm{BH}^2}=\sqrt{\left(\frac{7\sqrt{3}}{9}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^2}$$

$$=\sqrt{\frac{49}{27}-\frac{7}{4}}=\sqrt{\frac{7}{108}}=\frac{\sqrt{7}}{6\sqrt{3}}$$

よって　　$\tan\angle\mathrm{EBO'}=\frac{\mathrm{O'H}}{\mathrm{BH}}=\frac{\frac{\sqrt{7}}{6\sqrt{3}}}{\frac{\sqrt{7}}{2}}=\frac{1}{3\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{^{チ}3}}{^{ツ}9}$