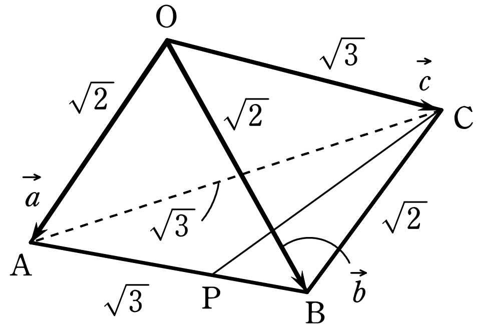
数学Ⅱ・B　第4問

(1)　$|\vec{a}-\vec{b}|^2=|\overrightarrow{\mathrm{OA}}-\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2=|\overrightarrow{\mathrm{BA}}|^2$

$=(\sqrt{3})^2={}^{\text{ア}}3$



よって　　$|\vec{a}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2=3$

ゆえに　　$(\sqrt{2})^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+(\sqrt{2})^2=3$

これを解いて　　$\vec{a}\cdot\vec{b}=\dfrac{{}^{\text{イ}}1}{{}^{\text{ウ}}2}$

同様に，$|\vec{b}-\vec{c}|^2=|\overrightarrow{\mathrm{CB}}|^2=2$ から

$(\sqrt{2})^2-2\vec{b}\cdot\vec{c}+(\sqrt{3})^2=2$　　　　よって　　$\vec{b}\cdot\vec{c}=\dfrac{{}^{\text{エ}}3}{{}^{\text{オ}}2}$

また，$|\vec{c}-\vec{a}|^2=|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2=3$ から

$(\sqrt{3})^2-2\vec{c}\cdot\vec{a}+(\sqrt{2})^2=3$　　　　よって　　$\vec{c}\cdot\vec{a}={}^{\text{カ}}1$

(2)　点Pは直線AB上にあるから，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(1-t)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}}=(1-t)\vec{a}+t\vec{b}$（$t$ は実数）とおける。

よって　　$\overrightarrow{\mathrm{CP}}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OC}}=(1-t)\vec{a}+t\vec{b}-\vec{c}$

ゆえに　　$\overrightarrow{\mathrm{CP}}\cdot\vec{a}=\{(1-t)\vec{a}+t\vec{b}-\vec{c}\}\cdot\vec{a}=(1-t)|\vec{a}|^2+t\vec{a}\cdot\vec{b}-\vec{c}\cdot\vec{a}$

$=(1-t)\cdot(\sqrt{2})^2+t\cdot\dfrac{1}{2}-1=-\dfrac{3}{2}t+1$

$\overrightarrow{\mathrm{CP}}\cdot\vec{a}=0$ であるから　　$-\dfrac{3}{2}t+1=0$　　　　ゆえに　　$t=\dfrac{2}{3}$

したがって　　$\overrightarrow{\mathrm{CP}}=\dfrac{{}^{\text{キ}}1}{{}^{\text{ク}}3}\vec{a}+\dfrac{{}^{\text{ケ}}2}{{}^{\text{コ}}3}\vec{b}-\vec{c}$

$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\dfrac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\dfrac{1\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}+2\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{2+1}$ であるから，点Pは線分ABを

$2:1=1:\dfrac{{}^{\text{サ}}1}{{}^{\text{シ}}2}$ に内分する。

また　　$\overrightarrow{\mathrm{CP}}\cdot\vec{b}=\left(\dfrac{1}{3}\vec{a}+\dfrac{2}{3}\vec{b}-\vec{c}\right)\cdot\vec{b}=\dfrac{1}{3}\vec{a}\cdot\vec{b}+\dfrac{2}{3}|\vec{b}|^2-\vec{b}\cdot\vec{c}$

$=\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{2}+\dfrac{2}{3}\cdot(\sqrt{2})^2-\dfrac{3}{2}={}^{\text{ス}}0$

ゆえに　　$|\overrightarrow{\mathrm{CP}}|^2=\overrightarrow{\mathrm{CP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CP}}=\overrightarrow{\mathrm{CP}}\cdot\left(\dfrac{1}{3}\vec{a}+\dfrac{2}{3}\vec{b}-\vec{c}\right)=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{CP}}\cdot\vec{a}+\dfrac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{CP}}\cdot\vec{b}-\overrightarrow{\mathrm{CP}}\cdot\vec{c}$

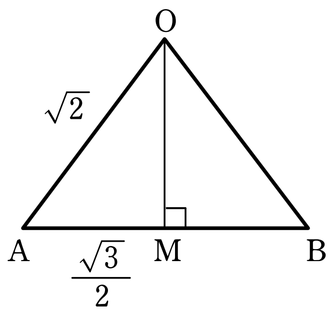
$=0+0-\left(\dfrac{1}{3}\vec{a}+\dfrac{2}{3}\vec{b}-\vec{c}\right)\cdot\vec{c}=-\dfrac{1}{3}\vec{c}\cdot\vec{a}-\dfrac{2}{3}\vec{b}\cdot\vec{c}+|\vec{c}|^2$

$=-\dfrac{1}{3}\cdot1-\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{3}{2}+(\sqrt{3})^2=\dfrac{5}{3}$

$|\overrightarrow{\mathrm{CP}}|>0$ であるから　　$|\overrightarrow{\mathrm{CP}}|=\sqrt{\dfrac{5}{3}}=\dfrac{\sqrt{{}^{\text{セソ}}15}}{{}^{\text{タ}}3}$

$\overrightarrow{\mathrm{CP}}\cdot\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{CP}}\cdot\vec{b}=0$ であるから　　$\overrightarrow{\mathrm{CP}}\perp\overrightarrow{\mathrm{OA}}$,　$\overrightarrow{\mathrm{CP}}\perp\overrightarrow{\mathrm{OB}}$

ゆえに，$\overrightarrow{\mathrm{CP}}$ は △OAB の各辺と垂直であるから，直線 CP は △OAB を含む平面に垂直である。したがって　　${}^{\text{チ}}$③



ここで，△OAB について，辺 AB の中点を M とすると　　OM⊥AB

よって，直角三角形 OAM において，三平方の定理により　　$\mathrm{OM}=\sqrt{(\sqrt{2})^2-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{5}}{2}$

ゆえに　　$\triangle\mathrm{OAB}=\frac{1}{2}\cdot\mathrm{AB}\cdot\mathrm{OM}$

$$=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{5}}{2}=\frac{\sqrt{{}^{\text{ツテ}}15}}{{}^{\text{ト}}4}$$

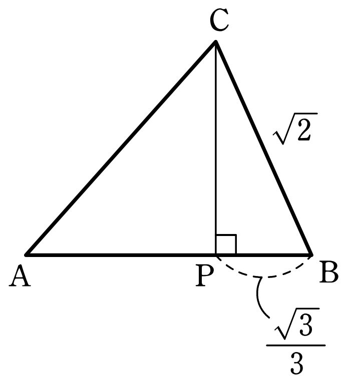
CP⊥△OAB であるから，四面体 OABC の体積は

$$\frac{1}{3}\cdot\triangle\mathrm{OAB}\cdot\mathrm{CP}=\frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{15}}{4}\cdot\frac{\sqrt{15}}{3}=\frac{{}^{\text{ナ}}5}{{}^{\text{ニヌ}}12}$$

別解　($|\overrightarrow{\mathrm{CP}}|$ の求め方)

$\overrightarrow{\mathrm{CP}}\cdot\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{CP}}\cdot\vec{b}=0$ であるから

$\overrightarrow{\mathrm{CP}}\perp\overrightarrow{\mathrm{OA}}$,　$\overrightarrow{\mathrm{CP}}\perp\overrightarrow{\mathrm{OB}}$



ゆえに，$\overrightarrow{\mathrm{CP}}$ は △OAB の各辺と垂直である。

すなわち　　CP⊥AB

ここで，AP : PB＝2 : 1 であるから

$$\mathrm{PB}=\frac{1}{2+1}\cdot\mathrm{AB}=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

したがって，直角三角形 CPB において，三平方の定理により

$$\mathrm{CP}=|\overrightarrow{\mathrm{CP}}|=\sqrt{(\sqrt{2})^2-\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2}=\frac{\sqrt{{}^{\text{セソ}}15}}{{}^{\text{タ}}3}$$

参考　(△OAB の面積)

△OAB の面積は次の式で求められる。

$$\triangle\mathrm{OAB}=\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2-(\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}})^2}$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2-(\vec{a}\cdot\vec{b})^2}=\frac{1}{2}\sqrt{(\sqrt{2})^2(\sqrt{2})^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2}$$

$$=\frac{\sqrt{{}^{\text{ツテ}}15}}{{}^{\text{ト}}4}$$