数学Ⅱ・B　第３問

(1)　数列 $\{a_n\}$ は初項 7，公差 -4 の等差数列であるから

$$a_n=7+(n-1)\cdot(-4)={}^{\text{アイ}}-4n+{}^{\text{ウエ}}11$$

よって　$$\sum_{k=1}^{n}a_k=\frac{n(a_1+a_n)}{2}=\frac{n\{7+(-4n+11)\}}{2}=n(-2n+9)={}^{\text{オカ}}-2n^2+{}^{\text{キ}}9n$$

(2)　$b_n=pn^2-qn-r$ であるから　$$\begin{aligned}b_{n+1}&=p(n+1)^2-q(n+1)-r\\&=p(n^2+2n+1)-q(n+1)-r\\&=pn^2+(2p-q)n+p-q-r\end{aligned}$$

よって　$$\begin{aligned}b_{n+1}-2b_n&=pn^2+(2p-q)n+p-q-r-2(pn^2-qn-r)\\&=-pn^2+(2p+q)n+p-q+r\end{aligned}$$

したがって，$b_{n+1}-2b_n=-2n^2+9n$　……　①　より

$$-pn^2+(2p+q)n+p-q+r=-2n^2+9n$$

両辺の係数を比較して

$$-p=-2,\ 2p+q=9,\ p-q+r=0$$

これを解くと　$p={}^{\text{ク}}2,\ q={}^{\text{ケ}}5,\ r={}^{\text{コ}}3$

よって，$b_n=2n^2-5n-3$ であるから　$b_1=2\cdot1^2-5\cdot1-3={}^{\text{サシ}}-6$

① と $c_{n+1}-2c_n=-2n^2+9n$　……　② において，②－① から

$$(c_{n+1}-b_{n+1})-2(c_n-b_n)=0$$

$d_n=c_n-b_n$ とおくと　$d_{n+1}-{}^{\text{ス}}2d_n=0$

よって，$d_{n+1}=2d_n$ となるから，数列 $\{d_n\}$ は，初項 $d_1=c_1-b_1=1-(-6)=7$，公比 2 の等比数列である。

したがって　$d_n=7\cdot2^{n-1}$

$c_n=d_n+b_n$ であるから　$c_n={}^{\text{セ}}7\cdot{}^{\text{ソ}}2^{n-1}+2n^2-5n-3$

よって　$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}c_k&=\sum_{k=1}^{n}(7\cdot2^{k-1}+2k^2-5k-3)\\&=\frac{7(2^n-1)}{2-1}+2\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)-5\cdot\frac{1}{2}n(n+1)-3n\\&=7(2^n-1)+\frac{1}{3}(2n^3+3n^2+n)-\frac{5}{2}(n^2+n)-3n\\&={}^{\text{タ}}7\cdot{}^{\text{チ}}2^n+\frac{{}^{\text{ツ}}2}{{}^{\text{テ}}3}n^3-\frac{{}^{\text{ト}}3}{{}^{\text{ナ}}2}n^2-\frac{{}^{\text{ニヌ}}31}{{}^{\text{ネ}}6}n-{}^{\text{ノ}}7\end{aligned}$$