数学Ⅱ・B　第２問

(1)　点 P の x 座標は方程式 $f(x)=g(x)$ の解である。

よって　$\dfrac{1}{8}x^2=-x^2+3ax-2a^2$　　整理して　$9x^2-24ax+16a^2=0$

よって　$(3x-4a)^2=0$

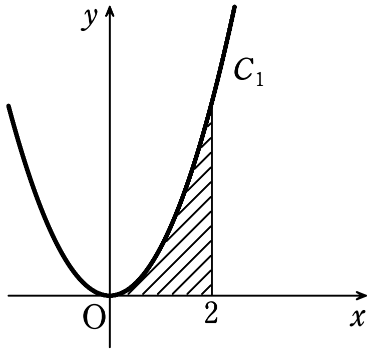
ゆえに　$x=\dfrac{4}{3}a$　　また　$f\left(\dfrac{4}{3}a\right)=\dfrac{1}{8}\cdot\left(\dfrac{4}{3}a\right)^2=\dfrac{2}{9}a^2$

したがって，P の座標は　$\left(\dfrac{{}^{\text{ア}}4}{{}^{\text{イ}}3}a,\ \dfrac{{}^{\text{ウ}}2}{{}^{\text{エ}}9}a^2\right)$

また，$f'(x)=\dfrac{1}{4}x$ であるから，点 P における C_1 の接線の方程式は

$$y-\frac{2}{9}a^2=\frac{1}{4}\cdot\frac{4}{3}a\left(x-\frac{4}{3}a\right)\qquad \text{すなわち}\qquad y=\frac{{}^{\text{オ}}1}{{}^{\text{カ}}3}ax-\frac{{}^{\text{キ}}2}{{}^{\text{ク}}9}a^2$$

(2)　求める面積を S_1 とすると，右の図より



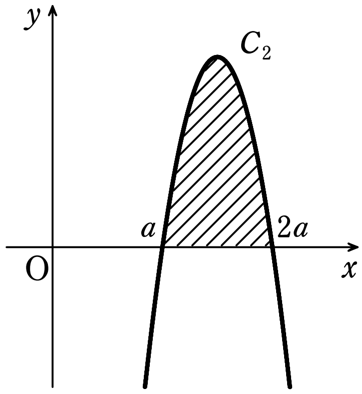
$$S_1=\int_0^2 f(x)dx=\int_0^2\frac{1}{8}x^2dx$$
$$=\left[\frac{1}{24}x^3\right]_0^2=\frac{1}{24}\cdot 2^3$$
$$=\frac{{}^{\text{ケ}}1}{{}^{\text{コ}}3}$$

また，$g(x)=-(x^2-3ax+2a^2)=-(x-a)(x-2a)$

であるから，C_2 と x 軸の交点の x 座標は　${}^{\text{サ}}a$，${}^{\text{シス}}2a$

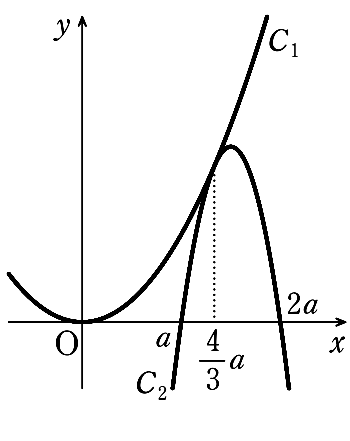
$a>0$ であるから，放物線 C_2 は右の図のようになる。

求める面積を S_2 とすると，右の図より



$$S_2=\int_a^{2a} g(x)dx=\int_a^{2a}\{-(x-a)(x-2a)\}dx$$
$$=\frac{1}{6}(2a-a)^3$$
$$=\frac{{}^{\text{セ}}1}{{}^{\text{ソ}}6}a^3$$

(3)　(1) より，C_1 と C_2 は点 P で接するから右の図のようになる。



[1]　$2a\leqq 2$　すなわち　$0<a\leqq{}^{\text{タ}}1$ のとき

下の図 [1] から

$$S(a)=S_1-S_2=-\frac{1}{6}a^3+\frac{1}{3}$$

[2]　$a\leqq 2<2a$　すなわち　$1<a\leqq{}^{\text{チ}}2$ のとき

下の図 [2] から

$$S(a)=S_1-\int_a^2 g(x)dx$$

$$=\frac{1}{3}-\int_a^2\{-(x^2-3ax+2a^2)\}dx$$

$$=\frac{1}{3}+\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{3}{2}ax^2+2a^2x\right]_a^2$$

$$=\frac{1}{3}+\left\{\frac{1}{3}\cdot 2^3-\frac{3}{2}a\cdot 2^2+2a^2\cdot 2-\left(\frac{1}{3}a^3-\frac{3}{2}a^3+2a^3\right)\right\}$$

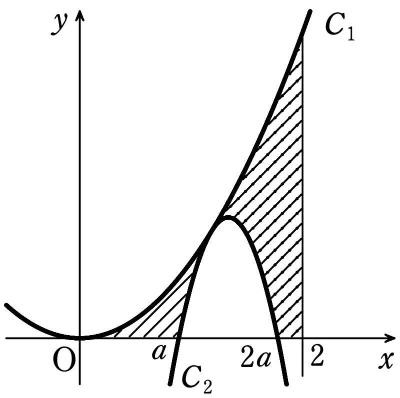
$$=-\left(\frac{2}{6}-\frac{9}{6}+\frac{12}{6}\right)a^3+4a^2-6a+\frac{1}{3}+\frac{8}{3}$$

$$=-\frac{{}^{ツ}5}{{}^{テ}6}a^3+{}^{ト}4a^2-{}^{ナ}6a+{}^{ニ}3$$

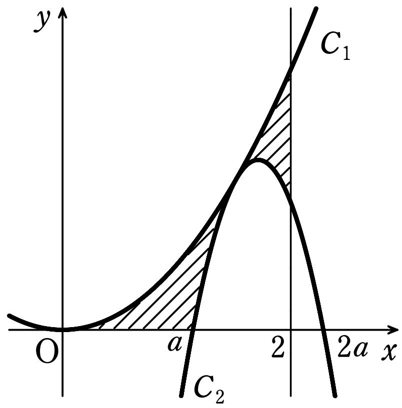
[3]　$2<a$ のとき

下の図 [3] から　　$S(a)=S_1=\dfrac{1}{3}$

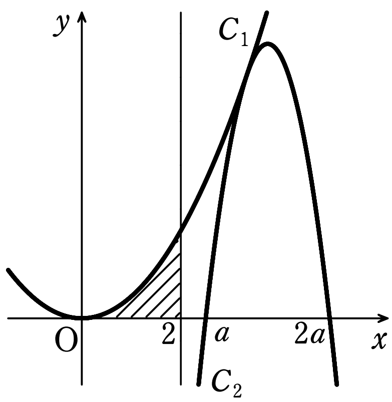
[1]



[2]



[3]



[1]　$0<a<1$ のとき　　$S'(a)=-\dfrac{1}{2}a^2$

よって，$S'(a)<0$ である。

[2]　$1<a<2$ のとき　　$S'(a)=-\dfrac{5}{2}a^2+8a-6=-\dfrac{1}{2}(5a-6)(a-2)$

$S'(a)=0$ とすると　　$a=\dfrac{6}{5}$，2

[3]　$2<a$ のとき　　$S(a)=\dfrac{1}{3}$，$S'(a)=0$

以上 [1] ～ [3] から，$S(a)$ の $a>0$ における増減表は次のようになる。

a	0	$\cdots$	1	$\cdots$	$\frac{6}{5}$	$\cdots$	2	$\cdots$
$S'(a)$		$-$		$-$	0	$+$		0
$S(a)$		↘		↘	極小	↗	$\frac{1}{3}$	

よって，$S(a)$ は，$a=\frac{^{ヌ}6}{^{ネ}5}$ で最小値 をとる。

また，その値は

$$S\left(\frac{6}{5}\right)=-\frac{5}{6}\cdot\left(\frac{6}{5}\right)^3+4\cdot\left(\frac{6}{5}\right)^2-6\cdot\left(\frac{6}{5}\right)+3=-\frac{36}{25}+\frac{144}{25}-\frac{180}{25}+\frac{75}{25}$$

$$=\frac{^{ノ}3}{^{ハヒ}25}$$