数学Ⅱ・B　第１問〔2〕

条件から，点 P，Q の座標はそれぞれ

$$\mathrm{P}(\cos a\theta,\ \sin a\theta),\quad \mathrm{Q}\left(2\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\theta}{3}\right),\ 2\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\theta}{3}\right)\right)$$

とおける。

(1)　$\theta=\pi$ のとき，$\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\theta}{3}=\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{\pi}{6}$ であるから

$$2\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\theta}{3}\right)=2\cos\frac{\pi}{6}=2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}\,,\quad 2\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\theta}{3}\right)=2\sin\frac{\pi}{6}=2\cdot\frac{1}{2}=1$$

よって，Q の座標は　$(\sqrt{{}^{\text{ス}}3},\ {}^{\text{セ}}1)$

(2)　3 点 O，P，Q がこの順に一直線上にあるとき，P，Q の動径が同じ位置にあればよいから　　$a\theta+2n\pi=\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\theta}{3}$　（n は整数）

これを変形して　　$\left(a+\dfrac{1}{3}\right)\theta=\left(\dfrac{1}{2}-2n\right)\pi$

よって　　$\theta=\dfrac{\dfrac{1}{2}-2n}{a+\dfrac{1}{3}}\pi=\dfrac{3-12n}{6a+2}\pi$

$a>0$，$\theta\geqq0$ より，$n=0$ のとき θ は最小となるから　　$\theta=\dfrac{{}^{\text{ツ}}3}{{}^{\text{タ}}6a+{}^{\text{チ}}2}\pi$

$0\leqq\theta\leqq\dfrac{3}{6a+2}\pi$ であるから　　$0\geqq-\dfrac{\theta}{3}\geqq-\dfrac{1}{6a+2}\pi$

よって　　$\dfrac{\pi}{2}\geqq\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\theta}{3}\geqq\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{1}{6a+2}\pi$

ゆえに，Q の動径が動く角の範囲は　　$\dfrac{\pi}{2}-\left(\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{1}{6a+2}\pi\right)=\dfrac{1}{6a+2}\pi$

よって，求める扇形の面積は　$\dfrac{1}{2}\cdot2^2\cdot\dfrac{1}{6a+2}\pi=\dfrac{{}^{\text{ツ}}1}{{}^{\text{テ}}3a+{}^{\text{ト}}1}\pi$

(3)　$\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\theta}{3}\right)=\sin\dfrac{\theta}{3}$，$\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\theta}{3}\right)=\cos\dfrac{\theta}{3}$ であるから

$$\begin{aligned}
\mathrm{PQ}^2&=\left(\cos a\theta-2\sin\frac{\theta}{3}\right)^2+\left(\sin a\theta-2\cos\frac{\theta}{3}\right)^2\\
&=\cos^2 a\theta-4\cos a\theta\sin\frac{\theta}{3}+4\sin^2\frac{\theta}{3}+\sin^2 a\theta-4\sin a\theta\cos\frac{\theta}{3}+4\cos^2\frac{\theta}{3}\\
&=\sin^2 a\theta+\cos^2 a\theta+4\left(\sin^2\frac{\theta}{3}+\cos^2\frac{\theta}{3}\right)-4\left(\sin a\theta\cos\frac{\theta}{3}+\cos a\theta\sin\frac{\theta}{3}\right)\\
&=1+4\cdot1-4\sin\left(a\theta+\frac{\theta}{3}\right)={}^{\text{ナ}}5-{}^{\text{ニ}}4\sin\left(\frac{{}^{\text{ヌ}}3a+{}^{\text{ネ}}1}{{}^{\text{ノ}}3}\theta\right)
\end{aligned}$$

(4)　関数 $y=\sin kx$ $(k>0)$ の正の周期のうち最小のものは $\dfrac{2\pi}{k}$ である。

よって，$f(x)=5-4\sin\left(\dfrac{3a+1}{3}x\right)$ の正の周期のうち最小のものは　$\dfrac{2\pi}{\dfrac{3a+1}{3}}$

よって，条件より　$\dfrac{2\pi}{\dfrac{3a+1}{3}}=4\pi$

すなわち　$\dfrac{3a+1}{3}=\dfrac{1}{2}$　　ゆえに　$6a+2=3$

したがって　$a=\dfrac{{}^{ハ}1}{{}^{ヒ}6}$