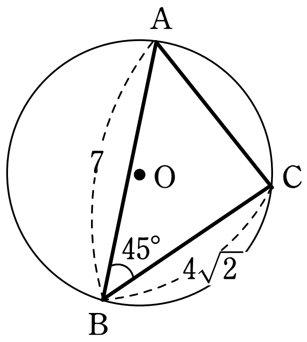
数学Ⅰ・A　第3問

余弦定理により

$$\begin{aligned}\mathrm{CA}^2&=\mathrm{AB}^2+\mathrm{BC}^2-2\mathrm{AB}\cdot\mathrm{BC}\cos\angle\mathrm{ABC}\\&=7^2+(4\sqrt{2})^2-2\cdot7\cdot4\sqrt{2}\cos45^\circ\\&=49+32-56\sqrt{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}=25\end{aligned}$$



$\mathrm{CA}>0$ であるから　　$\mathrm{CA}={}^{\text{ア}}5$

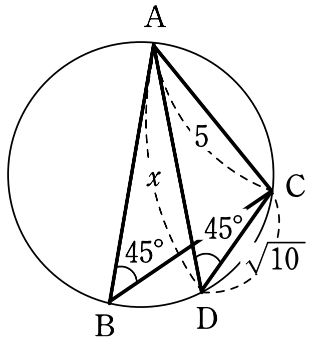
△ABC の外接円 O の半径を R とすると，正弦定理により

$$\frac{\mathrm{CA}}{\sin\angle\mathrm{ABC}}=2R \qquad \text{すなわち} \qquad \frac{5}{\sin45^\circ}=2R$$

よって　　$R=\dfrac{5}{2\sin45^\circ}=\dfrac{{}^{\text{イ}}5}{{}^{\text{ウ}}2}\sqrt{{}^{\text{エ}}2}$

円周角の定理により，$\angle\mathrm{ADC}=\angle\mathrm{ABC}={}^{\text{オカ}}45^\circ$ であるから，

△ACD に余弦定理を用いると



$$\mathrm{CA}^2=\mathrm{AD}^2+\mathrm{CD}^2-2\mathrm{AD}\cdot\mathrm{CD}\cos\angle\mathrm{ADC}$$

$$\Longleftrightarrow\quad 5^2=x^2+(\sqrt{10})^2-2\cdot x\cdot\sqrt{10}\cos45^\circ$$

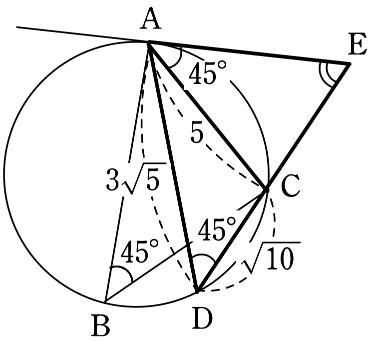
$$\Longleftrightarrow\quad 25=x^2+10-2\sqrt{10}\,x\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\Longleftrightarrow\quad x^2-{}^{\text{キ}}2\sqrt{{}^{\text{ク}}5}\,x-{}^{\text{ケコ}}15=0$$

$$\Longleftrightarrow\quad (x+\sqrt{5})(x-3\sqrt{5})=0$$

$x>0$ であるから　　$\mathrm{AD}=x={}^{\text{サ}}3\sqrt{{}^{\text{シ}}5}$

△ACE と △DAE について



接弦定理により

$\angle\mathrm{CAE}=\angle\mathrm{ADE}=45^\circ$　　…… ①

したがって　　ス ①

また　$\angle\mathrm{AEC}=\angle\mathrm{DEA}$（共通）…… ②

①，② により，2 組の角がそれぞれ等しいから

△ACE ∽ △DAE

したがって　　セ ②

△ACE ∽ △DAE により，$\mathrm{EC}:\mathrm{EA}=\mathrm{CA}:\mathrm{AD}=5:3\sqrt{5}$ であるから

$$\mathrm{EA}=\frac{{}^{\text{ソ}}3}{{}^{\text{タ}}5}\sqrt{{}^{\text{チ}}5}\,\mathrm{EC}\qquad\cdots\cdots ③$$

また，方べきの定理により　　$\mathrm{EA}^2=\mathrm{ED}\cdot\mathrm{EC}$　　　したがって　　ツ ⑤

よって　　$\mathrm{EA}^2=(\mathrm{EC}+\mathrm{CD})\cdot\mathrm{EC}$

この式に ③ と $\mathrm{CD}=\sqrt{10}$ を代入すると

$$\left(\frac{3}{5}\sqrt{5}\,\mathrm{EC}\right)^2=(\mathrm{EC}+\sqrt{10})\cdot\mathrm{EC}\qquad \text{整理して}\qquad \mathrm{EC}\left(\mathrm{EC}-\frac{5}{4}\sqrt{10}\right)=0$$

$EC>0$ であるから　　$EC=\dfrac{5}{4}\sqrt{10}$

③ に代入して　　$EA=\dfrac{3}{5}\sqrt{5}\cdot\dfrac{5}{4}\sqrt{10}=\dfrac{^{テト}15}{^{ナ}4}\sqrt{^{ニ}2}$

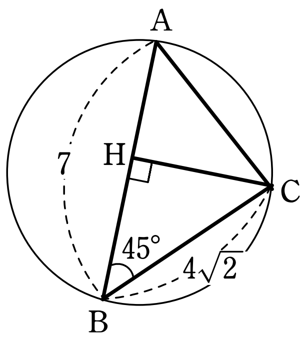
△ACE の面積は

$$\frac{1}{2}CA\cdot EA\sin\angle CAE=\frac{1}{2}\cdot 5\cdot\frac{15}{4}\sqrt{2}\cdot\sin 45^\circ$$

$$=\frac{75}{8}\sqrt{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{^{ヌネ}75}{^{ノ}8}$$

別解　CA の求め方について

点 C から辺 AB に引いた垂線と辺 AB との交点を H とする。



△BCH は直角二等辺三角形であるから

$$BH=CH=4$$

これより　　$AH=7-4=3$

△ACH に三平方の定理を用いると

$$CA^2=AH^2+CH^2=3^2+4^2=25$$

$CA>0$ であるから　　$CA=^{ア}5$