

数学 ・ A 第 2 問

のグラフが点 $(-2, 6)$ を通るとき $6 = a(-2)^2 - b(-2) - a + b$

よって $b = -a + 7$ ……

を平方完成すると

$$\begin{aligned} y &= a\left(x^2 - \frac{b}{a}x\right) - a + b = a\left\{x^2 - 2 \cdot \frac{b}{2a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2\right\} - a + b \\ &= a\left(x - \frac{b}{2a}\right)^2 - a\left(\frac{b}{2a}\right)^2 - a + b = a\left(x - \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 + 4a^2 - 4ab}{4a} \\ &= a\left(x - \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{(2a - b)^2}{4a} \end{aligned}$$

を代入して $y = a\left(x - \frac{-a+2}{2a}\right)^2 - \frac{\{2a - (-a+2)\}^2}{4a}$

$$= a\left(x - \frac{-a+2}{2a}\right)^2 - \frac{(3a-2)^2}{4a}$$

よって、のグラフの頂点の座標は $\left(\frac{-a+2}{2a}, -\frac{(3a-2)^2}{4a}\right)$

頂点の y 座標が -2 であるとき $-\frac{(3a-2)^2}{4a} = -2$

分母を払って $(3a-2)^2 = 8a$

左辺を展開して整理すると $9a^2 - 12a + 4 = 8a$

すなわち $(a-2)(9a-2) = 0$

よって $a = 2, \frac{2}{9}$

$$\begin{array}{r} 1 \times -2 \rightarrow -2 \\ 9 \times -2 \rightarrow -18 \\ \hline 9 \quad 4 \quad -20 \end{array}$$

$a = \frac{2}{9}$ のとき、頂点の x 座標は

$$x = \frac{-a+2}{2a} = \frac{-\frac{2}{9}+2}{2 \cdot \frac{2}{9}} = \frac{\frac{16}{9}}{\frac{4}{9}} = 4$$

よって、このとき は $y = \frac{2}{9}(x-4)^2 - 2$ ……

$y=0$ とすると $\frac{2}{9}(x-4)^2 - 2 = 0$ 整理して $(x-4)^2 = 9$

すなわち $x-4 = \pm 3$ したがって $x = 1, 7$

ゆえに、のグラフと x 軸の 2 交点の x 座標は $1, 7$ (または $7, 1$)

また、関数 f は $0 \leq x \leq 9$ において
 $x = 4$ のとき最小値 -2 ,
 $x = 9$ のとき最大値 $\frac{32}{9}$

をとる。

