## 数学Ⅱ・B　第4問

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{OE}}=(1-a)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+a\overrightarrow{\mathrm{OB}}$

$=(1-a)(1,\ 0,\ 0)+a(0,\ 1,\ 1)=(1-a,\ a,\ a)$

$\overrightarrow{\mathrm{OF}}=(1-a)\overrightarrow{\mathrm{OC}}+a\overrightarrow{\mathrm{OD}}$

$=(1-a)(1,\ 0,\ 1)+a(-2,\ -1,\ -2)=(1-3a,\ -a,\ 1-3a)$

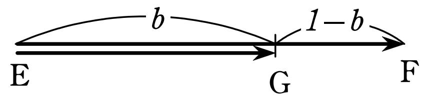
よって　　$\overrightarrow{\mathrm{EF}}=\overrightarrow{\mathrm{OF}}-\overrightarrow{\mathrm{OE}}=({}^{\text{アイ}}-2a,\ {}^{\text{ウエ}}-2a,\ {}^{\text{オ}}1-{}^{\text{カ}}4a)$

$\overrightarrow{\mathrm{EF}}\perp\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ のとき　　$\overrightarrow{\mathrm{EF}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=0$

ここで，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(-1,\ 1,\ 1)$ であるから　　$-2a\cdot(-1)-2a\cdot1+(1-4a)\cdot1=0$

よって　　$a=\dfrac{{}^{\text{キ}}1}{{}^{\text{ク}}4}$

(2)　$\overrightarrow{\mathrm{OG}}=\overrightarrow{\mathrm{OE}}+\overrightarrow{\mathrm{EG}}$




ここで，EG：GF$=b:(1-b)$ であるから

$\overrightarrow{\mathrm{EG}}=b\overrightarrow{\mathrm{EF}}$

$a=\dfrac{1}{4}$ のとき，(1) から　　$\overrightarrow{\mathrm{OE}}=\left(\dfrac{3}{4},\ \dfrac{1}{4},\ \dfrac{1}{4}\right)$，　$\overrightarrow{\mathrm{EF}}=\left(-\dfrac{1}{2},\ -\dfrac{1}{2},\ 0\right)$

ゆえに　　$\overrightarrow{\mathrm{OG}}=\overrightarrow{\mathrm{OE}}+b\overrightarrow{\mathrm{EF}}=\left(\dfrac{3}{4},\ \dfrac{1}{4},\ \dfrac{1}{4}\right)+b\left(-\dfrac{1}{2},\ -\dfrac{1}{2},\ 0\right)$

$=\left(\dfrac{{}^{\text{ケ}}3-{}^{\text{コ}}2b}{{}^{\text{サ}}4},\ \dfrac{{}^{\text{シ}}1-{}^{\text{ス}}2b}{4},\ \dfrac{{}^{\text{セ}}1}{4}\right)$

(3)　点 H は直線 BC 上にあるから，実数 $s$ を用いて $\overrightarrow{\mathrm{BH}}=s\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ と表される。

よって　　$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{BH}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}+s\overrightarrow{\mathrm{BC}}$

$=(0,\ 1,\ 1)+s(1,\ -1,\ 0)=(s,\ 1-s,\ 1)$　…… ①

また，点 H は直線 OG 上にあるから，実数 $t$ を用いて $\overrightarrow{\mathrm{OH}}=t\overrightarrow{\mathrm{OG}}$ と表される。

よって，(2) から　　$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=t\overrightarrow{\mathrm{OG}}=\left(\dfrac{3-2b}{4}t,\ \dfrac{1-2b}{4}t,\ \dfrac{1}{4}t\right)$　…… ②

①，② が一致するから

$s=\dfrac{3-2b}{4}t$ …… ③，　$1-s=\dfrac{1-2b}{4}t$ …… ④，　$1=\dfrac{1}{4}t$ …… ⑤

⑤ から　　$t={}^{\text{テ}}4$

これを ③，④ に代入して　　$s=3-2b$，　$1-s=1-2b$

辺々を加えて　　$1=4-4b$　　　　よって　　$b=\dfrac{{}^{\text{ソ}}3}{{}^{\text{タ}}4}$

このとき　　$s=3-2\cdot\dfrac{3}{4}=\dfrac{{}^{\text{チ}}3}{{}^{\text{ツ}}2}$

① に代入して　　$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\left(\dfrac{3}{2},\ 1-\dfrac{3}{2},\ 1\right)=\left(\dfrac{3}{2},\ -\dfrac{1}{2},\ 1\right)$

よって，点 H の座標は　　$\left(\dfrac{{}^{\text{ト}}3}{{}^{\text{ナ}}2},\ \dfrac{{}^{\text{ニヌ}}-1}{2},\ {}^{\text{ネ}}1\right)$

また，このとき，$\overrightarrow{\mathrm{BH}}=\dfrac{3}{2}\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ であるから

$$\mathrm{BC}:\mathrm{BH}=2:3$$

したがって，点 H は線分 BC を ノ3：1 に外分する。