数学II・B　第2問

$g(x)=f(x-a)+2a=(x-a)^3-(x-a)+2a=x^3-3ax^2+3a^2x-a^3-x+a+2a$

$\quad =x^3-3ax^2+(3a^2-1)x-a^3+3a$

(1)　$g(x)-f(x)=x^3-3ax^2+(3a^2-1)x-a^3+3a-(x^3-x)$

$$=-3ax^2+3a^2x-a^3+3a=a(^{アイ}-3x^2+{}^{ウ}3ax-a^2+{}^{エ}3)$$

x の方程式 $g(x)-f(x)=0$ が異なる 2 つの実数解をもつための条件は，

$-3x^2+3ax-a^2+3=0$ の判別式を D とすると

$$D=(3a)^2-4\cdot(-3)\cdot(-a^2+3)=-3(a^2-12)>0$$

よって　　$a^2-12<0$　　　　　これを解くと　$-2\sqrt{3}<a<2\sqrt{3}$

これと $a>0$ の共通範囲を求めて　　$0<a<{}^{オ}2\sqrt{{}^{カ}3}$

また　　　$g(x)-f(x)=a\left\{-3\left(x-\dfrac{a}{2}\right)^2-\dfrac{a^2}{4}+3\right\}$

$a>0$ であるから，$g(x)-f(x)$ は $x=\dfrac{{}^{キ}a}{{}^{ク}2}$ のとき最大値

$a\left(-\dfrac{a^2}{4}+3\right)=\dfrac{a}{{}^{ケ}4}({}^{コサ}12-a^{{}^{シ}2})$ をとる。

(2)　$h(a)=\dfrac{a}{4}(12-a^2)=3a-\dfrac{a^3}{4}$ とすると

$$h'(a)=3-\frac{3}{4}a^2=-\frac{3}{4}(a+2)(a-2)$$

$h(a)$ の増減表は右のようになる。

a	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$h'(a)$		$+$	0	$-$
$h(a)$		$\nearrow$	極大	$\searrow$

よって，$h(a)$ は $a={}^{ス}2$ で最大値 $\dfrac{2}{4}(12-2^2)={}^{セ}4$ をとる。

(3)　$a=\sqrt{3}$ のとき，曲線 $y=f(x)$ と曲線 $y=g(x)$ の 2 つの交点の x 座標は，

$-3x^2+3\sqrt{3}x-(\sqrt{3})^2+3=0$ すなわち $-3x(x-\sqrt{3})=0$ の実数解である。

これを解くと　　$x=0,\ \sqrt{3}$　　　　よって　　$\mathrm{P}({}^{ソ}0,\ 0)$，$\mathrm{Q}(\sqrt{{}^{タ}3},\ {}^{チ}2\sqrt{{}^{ツ}3})$

2 つの曲線 $y=f(x)$，$y=g(x)$ で囲まれた部分の面積 S は

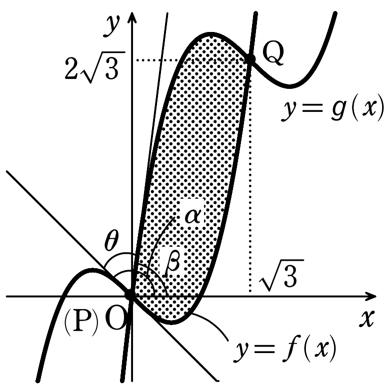
$$S=\int_0^{\sqrt{3}}\{g(x)-f(x)\}dx=\int_0^{\sqrt{3}}\{-3\sqrt{3}x(x-\sqrt{3})\}dx$$

$$=-3\sqrt{3}\int_0^{\sqrt{3}}x(x-\sqrt{3})dx=-3\sqrt{3}\cdot\left(-\frac{1}{6}\right)\cdot(\sqrt{3}-0)^3=\frac{{}^{テ}9}{{}^{ト}2}$$

$f(x)=x^3-x$ から　$f'(x)=3x^2-1$

$g(x)=x^3-3\sqrt{3}x^2+8x$ から

$\qquad g'(x)=3x^2-6\sqrt{3}x+8$



したがって，右の図のように，点 $\mathrm{P}(0,\ 0)$ における曲線 $y=f(x)$ の接線，曲線 $y=g(x)$ の接線と x 軸の正の向きとのなす角を，それぞれ α，β とすると

$$\tan\alpha=f'(0)=-1,\quad \tan\beta=g'(0)=8$$

また，2 接線のなす角 $\theta\left(0\leqq\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$ は　　$\theta=\alpha-\beta$

よって　　$\tan\theta=\tan(\alpha-\beta)=\dfrac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}=\dfrac{-1-8}{1+(-1)\cdot8}=\dfrac{{}^{ナ}9}{{}^{ニ}7}$