

数学 ・ B 第1問〔2〕

y と \sqrt{y} は対数の底であるから $y > 0, y \neq 1$

真数は正であるから $1 - \frac{x}{2} > 0$ よって $x < 2$ ……

また
$$\log_{\sqrt{y}} 3 = \frac{\log_3 3}{\log_3 \sqrt{y}} = \frac{1}{\frac{1}{2} \log_3 y} = \frac{2}{\log_3 y}$$

$$\log_y 81 = \frac{\log_3 81}{\log_3 y} = \frac{\log_3 3^4}{\log_3 y} = \frac{4}{\log_3 y}$$

したがって、与えられた不等式は

$$2 + \frac{2}{\log_3 y} < \frac{4}{\log_3 y} + 2 \cdot \frac{\log_3 \left(1 - \frac{x}{2}\right)}{\log_3 y}$$

ゆえに
$$1 < \frac{2}{\log_3 y} + \frac{\log_3 \left(1 - \frac{x}{2}\right)}{\log_3 y} \dots\dots$$

[1] $y > 1$ のとき $\log_3 y > 0$

よって、 の両辺に $\log_3 y$ を掛けると

$$\log_3 y < 1 + \log_3 \left(1 - \frac{x}{2}\right)$$

すなわち
$$\log_3 y < \log_3 3 + \log_3 \left(1 - \frac{x}{2}\right)$$

ゆえに
$$\log_3 y < \log_3 \left\{ 3 \left(1 - \frac{x}{2}\right) \right\}$$

[2] $0 < y < 1$ のとき $\log_3 y < 0$

よって、 の両辺に $\log_3 y$ を掛けて整理すると

$$\log_3 y > \log_3 \left\{ 3 \left(1 - \frac{x}{2}\right) \right\}$$

底 3 は 1 より大きいから

$y > 1$ のとき
$$y < 3 \left(1 - \frac{x}{2}\right)$$

$0 < y < 1$ のとき
$$y > 3 \left(1 - \frac{x}{2}\right)$$

これらと を同時に満たす領域を図示すると、右の図の影をつけた部分となる。ただし、境界は含まない。

よって、求める領域は ①

