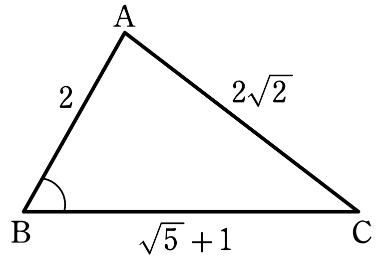
数学Ⅰ・A　第３問

(1)　余弦定理により



$$\cos\angle\mathrm{ABC}=\frac{\mathrm{AB}^2+\mathrm{BC}^2-\mathrm{CA}^2}{2\mathrm{AB}\cdot\mathrm{BC}}$$

$$=\frac{2^2+(\sqrt{5}+1)^2-(2\sqrt{2})^2}{2\cdot2\cdot(\sqrt{5}+1)}$$

$$=\frac{4+6+2\sqrt{5}-8}{4(\sqrt{5}+1)}=\frac{2(\sqrt{5}+1)}{4(\sqrt{5}+1)}=\frac{1}{2}$$

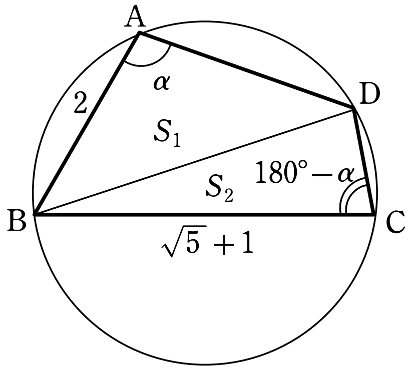
よって　　$\angle\mathrm{ABC}={}^{\text{アイ}}60^\circ$

$\triangle\mathrm{ABC}$ の外接円 O の半径を R とすると，正弦定理により

$$\frac{\mathrm{AC}}{\sin\angle\mathrm{ABC}}=2R \qquad \text{すなわち} \qquad \frac{2\sqrt{2}}{\sin 60^\circ}=2R$$

よって　　$R=\dfrac{\sqrt{2}}{\sin 60^\circ}=\sqrt{2}\times\dfrac{2}{\sqrt{3}}=\dfrac{{}^{\text{ウ}}2}{{}^{\text{エ}}3}\sqrt{{}^{\text{オ}}6}$

(2)　円に内接する四角形の対角の和は 180° であるから



$$\angle\mathrm{BAD}+\angle\mathrm{BCD}={}^{\text{カキク}}180^\circ$$

よって，$\angle\mathrm{BAD}=\alpha$ とすると

$$\angle\mathrm{BCD}=180^\circ-\alpha$$

$\mathrm{CD}=k\mathrm{AD}$ とおくと

$$S_1=\frac{1}{2}\mathrm{AB}\cdot\mathrm{AD}\sin\alpha=\frac{1}{2}\cdot2\cdot\mathrm{AD}\sin\alpha$$

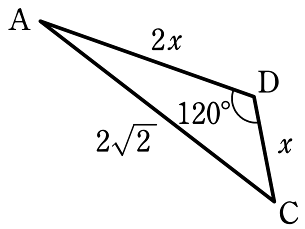
$$=\mathrm{AD}\sin\alpha$$

$$S_2=\frac{1}{2}\mathrm{BC}\cdot\mathrm{CD}\sin(180^\circ-\alpha)=\frac{1}{2}(\sqrt{5}+1)k\mathrm{AD}\sin\alpha$$

したがって　　$\dfrac{S_1}{S_2}=\dfrac{\mathrm{AD}\sin\alpha}{\frac{1}{2}(\sqrt{5}+1)k\mathrm{AD}\sin\alpha}=\dfrac{2}{(\sqrt{5}+1)k}$　　……(＊)

① と (＊) から　　$\sqrt{5}-1=\dfrac{2}{(\sqrt{5}+1)k}$　　　よって　$k=\dfrac{1}{2}$

したがって　　$\mathrm{CD}=\dfrac{{}^{\text{ケ}}1}{{}^{\text{コ}}2}\mathrm{AD}$



$2\mathrm{CD}=\mathrm{AD}$ であるから，$\mathrm{CD}=x$ とおくと　　$\mathrm{AD}=2x$

また　　$\angle\mathrm{ADC}=180^\circ-\angle\mathrm{ABC}=180^\circ-60^\circ=120^\circ$

$\triangle\mathrm{ACD}$ に余弦定理を用いると

$$\mathrm{AC}^2=\mathrm{AD}^2+\mathrm{CD}^2-2\mathrm{AD}\cdot\mathrm{CD}\cos\angle\mathrm{ADC}$$

$$\iff (2\sqrt{2})^2=(2x)^2+x^2-2\cdot2x\cdot x\cos120^\circ$$

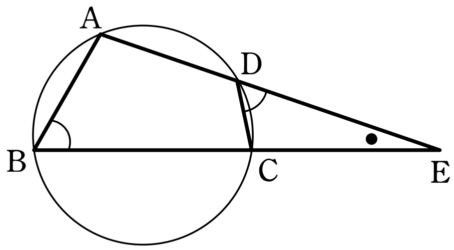
$$\iff 8=4x^2+x^2+2x^2 \iff 8=7x^2 \iff x^2=\frac{8}{7}$$

$\mathrm{CD}=x>0$ であるから　　$\mathrm{CD}=x=\sqrt{\dfrac{8}{7}}=\dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{7}}=\dfrac{{}^{\text{サ}}2}{{}^{\text{シ}}7}\sqrt{{}^{\text{スセ}}14}$

△ABE と △CDE において，

$\angle \mathrm{E}$ は共通，$\angle \mathrm{ABE} = \angle \mathrm{CDE} = 60^\circ$

であるから，△ABE と △CDE は相似である。



よって　$\dfrac{S_3}{S_4} = \dfrac{\mathrm{AB}^2}{\mathrm{CD}^2} = \dfrac{2^2}{\dfrac{8}{7}} = \dfrac{{}^{\text{ツ}}7}{{}^{\text{タ}}2}$　…… ②

① より $S_1 = (\sqrt{5} - 1)S_2$，② より $S_3 = \dfrac{7}{2}S_4$ であるから

$$(\text{四角形 ABCD の面積}) = S_1 + S_2 = (\sqrt{5} - 1)S_2 + S_2 = \sqrt{5}\,S_2$$

$$(\text{四角形 ABCD の面積}) = S_3 - S_4 = \frac{7}{2}S_4 - S_4 = \frac{5}{2}S_4$$

よって　$\sqrt{5}\,S_2 = \dfrac{5}{2}S_4$　　したがって　$\dfrac{S_2}{S_4} = \dfrac{\sqrt{{}^{\text{チ}}5}}{{}^{\text{ツ}}2}$