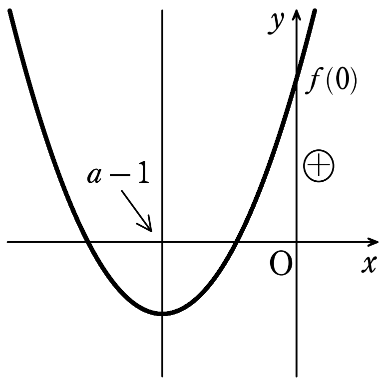
数学Ⅰ・A　第2問

(1)
$$y=x^2-2(a-1)x+2a^2-8a+4$$
$$=\{x-(a-1)\}^2-(a-1)^2+2a^2-8a+4$$
$$=\{x-(a-1)\}^2+a^2-6a+3$$

よって，G の頂点の座標は　$\left(a-{}^{\text{ア}}1,\ a^2-{}^{\text{イ}}6a+{}^{\text{ウ}}3\right)$



G は下に凸の放物線であるから，G が x 軸と異なる2点で交わるとき　$a^2-6a+3<0$

これを解いて　${}^{\text{エ}}3-\sqrt{{}^{\text{オ}}6}<a<3+\sqrt{6}$　…… ②

さらに，2つの交点がともに x 軸の負の部分にあるとき，$f(x)=x^2-2(a-1)x+2a^2-8a+4$ とすると

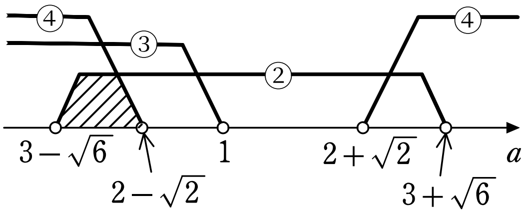
$$\begin{cases}\text{軸について}\quad a-1<0\\ f(0)>0\end{cases}$$

$a-1<0$ から　$a<1$　…… ③

$f(0)>0$ から　$2a^2-8a+4>0$

これを解いて

$a<2-\sqrt{2}$，$2+\sqrt{2}<a$　…… ④



②，③，④ の共通範囲を求めて

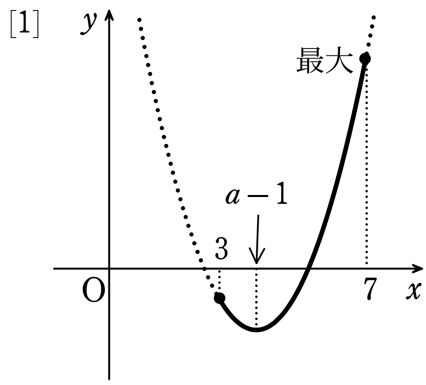
$${}^{\text{カ}}3-\sqrt{{}^{\text{キ}}6}<a<{}^{\text{ク}}2-\sqrt{{}^{\text{ケ}}2}$$

(2)　G の頂点の x 座標が3以上7以下の範囲にあるとき　$3\leqq a-1\leqq 7$

よって　${}^{\text{コ}}4\leqq a\leqq {}^{\text{サ}}8$　…… ⑤

[1]　$3\leqq a-1\leqq 5$ すなわち $4\leqq a\leqq {}^{\text{シ}}6$ のとき

$$M=f(7)=7^2-2(a-1)\cdot 7+2a^2-8a+4$$
$$={}^{\text{ス}}2a^2-{}^{\text{セソ}}22a+{}^{\text{タチ}}67$$



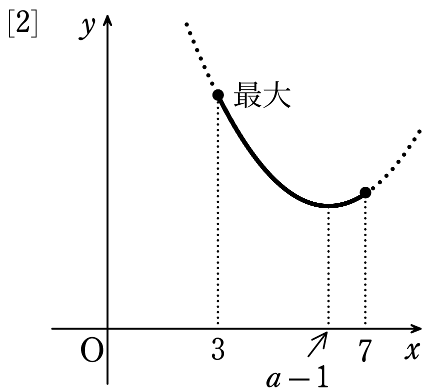
[2]　$5\leqq a-1\leqq 7$ すなわち $6\leqq a\leqq 8$ のとき

$$M=f(3)=3^2-2(a-1)\cdot 3+2a^2-8a+4$$
$$={}^{\text{ツ}}2a^2-{}^{\text{テト}}14a+{}^{\text{ナニ}}19$$

$3\leqq x\leqq 7$ における最小値が6のとき

$$a^2-6a+3=6\quad\cdots\cdots ⑥$$

これを解いて　$a=3\pm 2\sqrt{3}$



このうち，⑤ を満たす解は

$$a={}^{\text{ヌ}}3+{}^{\text{ネ}}2\sqrt{{}^{\text{ノ}}3}$$

$a=3+2\sqrt{3}$ のとき，⑥ より　$a^2=6a+3$

$6\leqq 3+2\sqrt{3}\leqq 8$ であるから，[2] より

$$M=2a^2-14a+19$$
$$=2(6a+3)-14a+19=-2a+25$$
$$=-2(3+2\sqrt{3})+25={}^{\text{ハヒ}}19-{}^{\text{フ}}4\sqrt{{}^{\text{ヘ}}3}$$