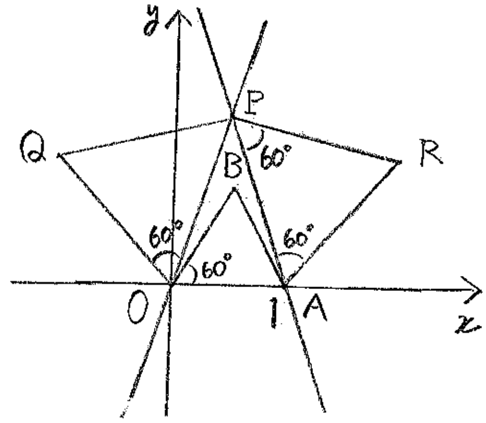
数学Ⅱ・B 第7問

(1) 点Bは，AをOのまわりに



60°だけ回転した点であるから

$\beta=\cos 60^\circ+i\sin 60^\circ=\dfrac{{}^{ア}1+\sqrt{{}^{イ}3}\,i}{{}^{ウ}2}$

点QはPをOのまわりに ${}^{エオ}60^\circ$ だけ

回転した点であるから

$z_1=(x+yi)(\cos 60^\circ+i\sin 60^\circ)=\beta z$

よって ^{カ}⓪

点RはAをPのまわりに 60° だけ回転した点であるから

$z_2=z+\beta(1-z)$　　よって ^{キ}⓪

したがって，$w=\dfrac{z_1-\beta}{z_2-\beta}$ とおくと

$$w=\frac{\beta z-\beta}{z+\beta(1-z)-\beta}=\frac{\beta}{1-\beta}\cdot\frac{z-1}{z}$$

$$=\frac{{}^{クケ}-1+\sqrt{{}^{コ}3}\,i}{{}^{サ}2}\cdot\frac{z-1}{z}\ \cdots\cdots①$$

(2) ①に $z=x+yi$ を代入すると

$$w=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\cdot\frac{x+yi-1}{x+yi}=\frac{(-1+\sqrt{3}i)(x+yi-1)(x-yi)}{2(x+yi)(x-yi)}$$

$$=\frac{-x^2-y^2+x-\sqrt{3}y+(\sqrt{3}x^2+\sqrt{3}y^2-\sqrt{3}x-y)i}{2(x^2+y^2)}$$

よって，w が純虚数になるのは $-x^2-y^2+x-\sqrt{3}y=0$ のときである。

変形すると $\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(y+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2=1$

ゆえに，BQとBRが垂直に交わるとき，点Pがつねに

$\dfrac{{}^{シ}1-\sqrt{{}^{ス}3}\,i}{{}^{セ}2}$ を表す点を中心とする半径 ${}^{ソ}1$ の円周上

に存在する。