数学Ⅱ・B　第4問

(1)　$|\vec{a}+\vec{b}|^2=1$ から　$|\vec{a}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2=1$

この式に $|\vec{a}|=1$, $|\vec{b}|=1$ を代入すると　$1+2\vec{a}\cdot\vec{b}+1=1$

ゆえに　$\vec{a}\cdot\vec{b}=\dfrac{{}^{アイ}-1}{{}^{ウ}2}$

また　$|2\vec{a}+\vec{b}|^2=4|\vec{a}|^2+4\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2$

この式に $|\vec{a}|=1$, $|\vec{b}|=1$, $\vec{a}\cdot\vec{b}=-\dfrac{1}{2}$ を代入すると

$$|2\vec{a}+\vec{b}|^2=4-2+1=3$$

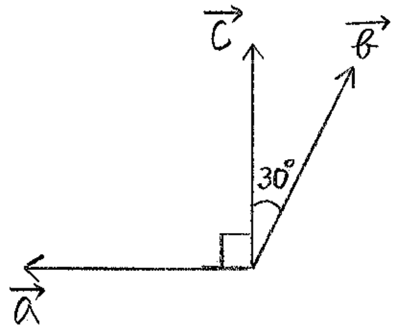
$|2\vec{a}+\vec{b}|>0$ であるから　$|2\vec{a}+\vec{b}|=\sqrt{{}^{エ}3}$

$(2\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{b}=2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2=-1+1=0$

ゆえに，$2\vec{a}+\vec{b}$ と $\vec{b}$ のなす角は ${}^{オカ}90^\circ$

(2)　$\vec{a}\cdot\vec{b}=\dfrac{-1}{2}$，$\vec{c}\cdot\vec{a}=0$，$\vec{b}\cdot\vec{c}>0$ から

3つのベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ の位置関係は右図のようになる。



ここで，$\vec{c}=s\vec{a}+t\vec{b}$ $(s>0,\ t>0)$ とおくと

$\vec{c}\cdot\vec{a}=0$ から　$s-\dfrac{1}{2}t=0$ ……①

$\vec{b}\cdot\vec{c}=|\vec{b}||\vec{c}|\cos30^\circ=1\cdot1\cdot\dfrac{\sqrt3}{2}=\dfrac{\sqrt3}{2}$

よって　$-\dfrac{1}{2}s+t=\dfrac{\sqrt3}{2}$ ……②

①，②から　$s=\dfrac{\sqrt3}{3}$，$t=\dfrac{2\sqrt3}{3}$

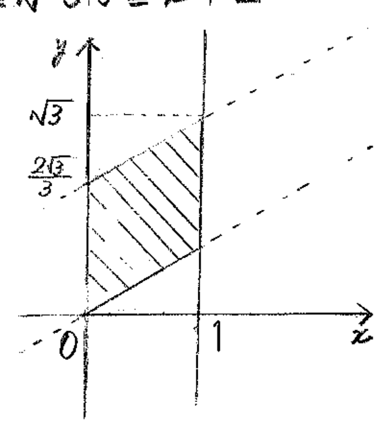
ゆえに　$\vec{c}=\dfrac{\sqrt{{}^{キ}3}}{{}^{ク}3}(\vec{a}+{}^{ケ}2\vec{b})$

(3)　$\vec{p}=x\vec{a}+y\vec{c}$ から　$\vec{p}\cdot\vec{a}=x|\vec{a}|^2+y\vec{c}\cdot\vec{a}=x$，$\vec{p}\cdot\vec{b}=x\vec{a}\cdot\vec{b}+y\vec{b}\cdot\vec{c}=\dfrac{-x}{2}+\dfrac{\sqrt3}{2}y$

よって　$0\leqq x\leqq1$，$0\leqq\dfrac{-x}{2}+\dfrac{\sqrt3}{2}y\leqq1$ すなわち ${}^{コ}0\leqq x\leqq{}^{サ}1$，$x\leqq\sqrt{{}^{シ}3}\,y\leqq x+{}^{ス}2$

また　$\vec{p}\cdot\vec{c}=x\vec{c}\cdot\vec{a}+y|\vec{c}|^2=y$

ゆえに，右の図から $\vec{p}\cdot\vec{c}$ は最大値 $\sqrt{{}^{セ}3}$ をとる。



このとき　$\vec{p}=\vec{a}+\sqrt3\,\vec{c}=\vec{a}+\sqrt3\cdot\dfrac{\sqrt3}{3}(\vec{a}+2\vec{b})$

$\qquad=\,{}^{ソ}2\vec{a}+{}^{タ}2\vec{b}$