数学Ⅱ・B　第2問

(1)　点 (t, t^2) における C_1 の接線の方程式は

$y - t^2 = 2t(x - t)$　すなわち　$y = {}^{\text{ア}}2tx - t^{\text{イ}2}$

これが C_2 にも接することから，方程式

$2tx - t^2 = x^2 - 4ax + 4a(a+1)$　すなわち

$x^2 - 2(2a+t)x + t^2 + 4a^2 + 4a = 0$ ……① の判別式を D

とすると $D = 0$ である。

よって　$\dfrac{D}{4} = \{-(2a+t)\}^2 - (t^2 + 4a^2 + 4a) = 0$

整理すると　$4a(t-1) = 0$

$a > 0$ であるから　$t = {}^{\text{ウ}}1$

したがって，直線 l の方程式は　$y = {}^{\text{エ}}2x - {}^{\text{オ}}1$

また，$t = 1$ を①に代入すると　$x^2 - 2(2a+1)x + 4a^2 + 4a + 1 = 0$

すなわち　$\{x - (2a+1)\}^2 = 0$　　よって　$x = 2a+1$

このとき　$y = 2(2a+1) - 1 = 4a + 1$

ゆえに，l と C_2 の接点の座標は $({}^{\text{カキ}}2a + {}^{\text{ク}}1,\ {}^{\text{ケコ}}4a + {}^{\text{サ}}1)$

(2)　点Pの x 座標は方程式 $x^2 = x^2 - 4ax + 4a(a+1)$ の解である。

これを解くと　$x = a+1$　　このとき　$y = (a+1)^2$

ゆえに，点Pの座標は　$(a + {}^{\text{シ}}1,\ (a + {}^{\text{シ}}1)^2)$

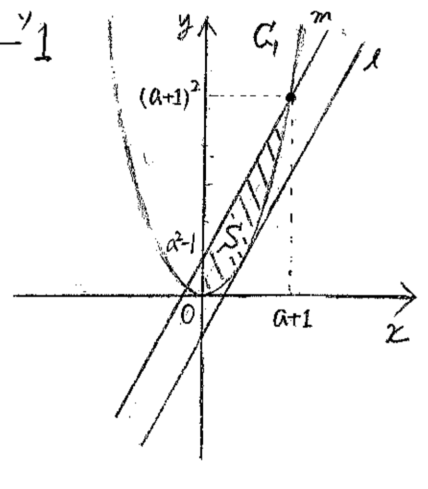
このとき，直線 m の方程式は

$y - (a+1)^2 = 2\{x - (a+1)\}$　すなわち　$y = {}^{\text{ス}}2x + a^{\text{セ}2} - {}^{\text{ソ}}1$

また，直線 m と y 軸との交点の y 座標が正となるのは

$a^2 - 1 > 0$　　$a > 0$ であるから　$a > {}^{\text{タ}}1$

よって，右の図から面積 S は



$$S = \int_0^{a+1} \{2x + a^2 - 1 - (x^2)\}\,dx$$

$$= \left[-\frac{x^3}{3} + x^2 + (a^2-1)x\right]_0^{a+1}$$

$$= \frac{{}^{\text{チ}}1}{{}^{\text{ツ}}3}({}^{\text{テ}}a+1)^{\text{ト}2}({}^{\text{ナニ}}2a - 1)$$