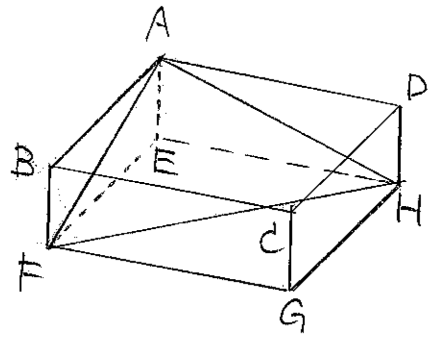
数学I・A　第3問

三平方の定理により



$$EF=\sqrt{AF^2-AE^2}=\sqrt{8^2-(\sqrt{10})^2}$$
$$=\sqrt{54}=3\sqrt{6}$$
$$EH=\sqrt{AH^2-AE^2}=\sqrt{10^2-(\sqrt{10})^2}$$
$$=\sqrt{90}=3\sqrt{10}$$

よって

$$FH=\sqrt{EF^2+EH^2}=\sqrt{54+90}=\sqrt{144}={}^{\text{ウエ}}12$$

△AFHにおいて，余弦定理から

$$\cos\angle FAH=\frac{AF^2+AH^2-FH^2}{2AF\cdot AH}=\frac{8^2+10^2-12^2}{2\cdot 8\cdot 10}$$

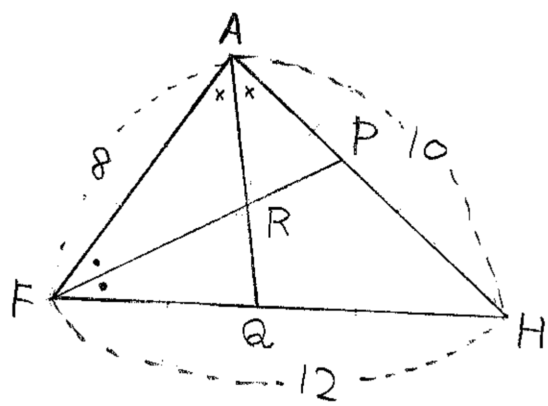
$\sin\angle FAH>0$であるから

$$\sin\angle FAH=\sqrt{1-\cos^2\angle FAH}=\sqrt{1-\left(\frac{1}{8}\right)^2}=\frac{3\sqrt{7}}{8}$$

よって，三角形AFHの面積は

$$\frac{1}{2}AF\cdot AH\sin\angle FAH=\frac{1}{2}\cdot 8\cdot 10\cdot\frac{3\sqrt{7}}{8}={}^{\text{オカ}}15\sqrt{{}^{\text{キ}}7}$$

三角形AFHの内角の二等分線の交点Rは，
三角形AFHの内心である。よって ${}^{\text{ク}}$②



FPは∠AFHの二等分線であるから

$$AP:PH=AF:FH=8:12=2:3$$

よって　$AP=\dfrac{2}{2+3}AH=\dfrac{2}{5}\cdot 10={}^{\text{ケ}}4$

ARは∠FAPの二等分線であるから

$$PR:RF=AP:AF=4:8=1:2$$

よって　$PF:PR=(1+2):1={}^{\text{コ}}3:1$

（つづく）

四面体EAPRと四面体EAFHは底面をそれぞれ$\triangle ARP$，$\triangle AFH$と考えると高さが一致する。

よって，四面体EAPRと四面体EAFHの体積比は$\triangle ARP$と$\triangle AFH$の面積比に等しい。

$$\triangle ARP = \frac{PR}{PF}\triangle AFP = \frac{1}{3}\triangle AFP \quad \cdots\cdots①$$

$$\triangle AFP = \frac{AP}{AH}\triangle AFH = \frac{2}{5}\triangle AFH \quad \cdots\cdots②$$

①，②から　$\triangle ARP = \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{5}\triangle AFH = \frac{2}{15}\triangle AFH$

四面体EAFHの体積は

$$\frac{1}{3}\triangle EFH \cdot AE = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot 3\sqrt{6}\cdot 3\sqrt{10}\cdot\sqrt{10}$$

$$= 15\sqrt{6}$$

したがって，四面体EAPRの体積は

$$\frac{2}{15}\cdot 15\sqrt{6} = {}^{サ}2\sqrt{{}^{シ}6}$$