

数学Ⅱ・B 第5問

Xのとりうる値は $a-m, a+1, a+3$ である。

さいころを1回投げたとき、事象Aが起こる確率は $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

(1) さいころを5回投げて、1回だけAが起こる確率であるから

$${}^5C_1 \left(\frac{1}{3}\right) \left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{{}^4P_1 \cdot 80}{243}$$

(2) 4回目でゲームが終了するのは、3回目までに1回Aが起こり、4回目にAが起こる場合である。

$$\text{よって } {}^3C_1 \left(\frac{1}{3}\right) \left(\frac{2}{3}\right)^2 \times \frac{1}{3} = \frac{{}^4P_1}{27}$$

2回目でゲームが終了するのは、2回続けてAが起こる場合で、その確率は $\left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}$

3回目でゲームが終了するのは、2回目までに1回Aが起こり、3回目にAが起こる場合で、その確率は

$${}^2C_1 \left(\frac{1}{3}\right) \left(\frac{2}{3}\right) \times \frac{1}{3} = \frac{4}{27}$$

したがって、4回目または5回目にゲームが終了する確率は

$$1 - \frac{1}{9} - \frac{4}{27} = \frac{{}^4P_1}{27}$$

(3) 3回目までに一度もAが起こらない確率は $\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{{}^3P_0}{27}$

求める条件つき確率は、3回目までに一度もAが起こらないとき、

4回目または5回目に少なくとも1回Aが起こる確率であるから

$$1 - \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{{}^2P_1}{9}$$

$$(4) P(X=a-m) = \left(\frac{2}{3}\right)^5 = \frac{32}{243}$$

$$P(X=a+3) = 1 - P(X=a-m) - P(X=a+1) = 1 - \frac{32}{243} - \frac{80}{243} = \frac{131}{243}$$

$$\text{したがって } E(X) = (a-m) \frac{32}{243} + (a+1) \frac{80}{243} + (a+3) \frac{131}{243} = a + \frac{{}^4P_1 \cdot 473 - {}^4P_1 \cdot 32m}{243}$$

$$473 - 32m > 0 \text{ を解くと } m < 14.7 \dots \text{ よって } m \leq 14$$