

数学II・B 第1問 (1)

$$\begin{aligned} (1) \quad AC^2 &= (\cos 2\theta + 1)^2 + \sin^2 2\theta = \cos^2 2\theta + \sin^2 2\theta + 2\cos 2\theta + 1 \\ &= 2 + 2\cos 2\theta = 2 + 2(2\cos^2 \theta - 1) \\ &= 4\cos^2 \theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} BC^2 &= (\cos 2\theta - \cos \theta)^2 + (\sin 2\theta - \sin \theta)^2 \\ &= \cos^2 2\theta + \sin^2 2\theta + \cos^2 \theta + \sin^2 \theta \\ &\quad - 2(\cos 2\theta \cos \theta + \sin 2\theta \sin \theta) \\ &= 2 - 2\cos(2\theta - \theta) \\ &= 2 - 2\cos \theta = 2 - 2\left(1 - 2\sin^2 \frac{\theta}{2}\right) \\ &= 4\sin^2 \frac{\theta}{2} \end{aligned}$$

$$d = AC + BC = \sqrt{4\cos^2 \theta} + \sqrt{4\sin^2 \frac{\theta}{2}}$$

$$0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ \text{ から } \sin \frac{\theta}{2} \geq 0$$

$$\text{よって } d = 2|\cos \theta| + 2\sin \frac{\theta}{2}$$

$$(2) \quad 0^\circ \leq \theta \leq 90^\circ \text{ のとき } 0 \leq \sin \frac{\theta}{2} \leq \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ であるから } 0 \leq t \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos \theta \geq 0, \sin \frac{\theta}{2} \geq 0 \text{ であるから}$$

$$\begin{aligned} d &= 2\cos \theta + 2\sin \frac{\theta}{2} = 2\left(1 - 2\sin^2 \frac{\theta}{2}\right) + 2\sin \frac{\theta}{2} \\ &= -4t^2 + 2t + 2 = -4\left(t - \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{9}{4} \end{aligned}$$

$$90^\circ \leq \theta \leq 180^\circ \text{ のとき } \frac{\sqrt{2}}{2} \leq \sin \frac{\theta}{2} \leq 1 \text{ であるから } \frac{\sqrt{2}}{2} \leq t \leq 1$$

$$\cos \theta \leq 0, \sin \frac{\theta}{2} > 0 \text{ であるから}$$

$$\begin{aligned} d &= -2\cos \theta + 2\sin \frac{\theta}{2} = -2\left(1 - 2\sin^2 \frac{\theta}{2}\right) + 2\sin \frac{\theta}{2} \\ &= 4t^2 + 2t - 2 = 4\left(t + \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{9}{4} \end{aligned}$$

右のグラフより,

d は $t = \frac{\sqrt{2}}{2}$ のとき 最小値 $\sqrt{2}$ をとる。

このとき, $\frac{\theta}{2} = 45^\circ$ より $\theta = 90^\circ$

また, d は $t = 1$ のとき 最大値 4 をとる。

このとき, $\frac{\theta}{2} = 90^\circ$ より $\theta = 180^\circ$

