数学I・A　第2問〔1〕

A を B で割ると

$$
\begin{array}{r|l}
 & x^2 + x + a^2 \\
\hline
x^2 - x - a & x^4 + (a^2-a-1)x^2 + (-a^2+b)x + b^3 \\
 & x^4 - x^3 - ax^2 \\
\hline
 & x^3 + (a^2-1)x^2 + (-a^2+b)x \\
 & x^3 - x^2 - ax \\
\hline
 & a^2x^2 + (-a^2+a+b)x + b^3 \\
 & a^2x^2 - a^2x - a^3 \\
\hline
 & (a+b)x + a^3 + b^3
\end{array}
$$

よって　$Q = x^2 + x + a^{\text{ア}2}$，　$R = (a+b)x + a^{\text{イ}3} + b^{\text{ウ}3}$

(1)　$R = x+7$　から　$(a+b)x + a^3 + b^3 = x+7$

これが x についての恒等式であるから　$a+b=1$，$a^3+b^3=7$

$b=1-a$ を $a^3+b^3=7$ に代入して整理すると　$a^2-a-2=0$

よって　$(a-2)(a+1)=0$　ゆえに　$a = {}^{\text{エ}}2$　または　$a = {}^{\text{オカ}}-1$

(2)　(i)　$Q = x^2+x+a^2 = \left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + a^2 - \frac{1}{4}$

$a < -\frac{1}{2}$ のとき　$a^2 - \frac{1}{4} > 0$　よって，すべての実数 x に対して $Q>0$

逆に，すべての x に対して $Q>0$ ならば　$a^2-\frac{1}{4}>0$

よって，　$a<-\frac{1}{2}$，$\frac{1}{2}<a$ となり，$a<-\frac{1}{2}$ とは限らない。

ゆえに，十分条件であるが必要条件ではない。すなわち ${}^{\text{キ}}$②

(ii)　$R = (a+b)x + (a+b)(a^2-ab+b^2)$　から

$a+b=0$ のとき　$R=0$　すなわち A は B で割り切れる。

逆に，A は B で割り切れるとき　$R=0$

よって，すべての実数 x に対して $R=0$ となるのは　$a+b=0$

ゆえに，必要十分条件である。すなわち ${}^{\text{ク}}$⓪