

数学 I・A 第1問 (2)

(1) 2次関数 $y = x^2 - \frac{b-2}{a}$ のグラフは下に凸で、頂点の座標は $(0, -\frac{b-2}{a})$ である。

また、 a, b は $1 \leq a \leq 6, 1 \leq b \leq 6$ の正の整数であるから

$-\frac{b-2}{a} > 0$ すなわち $b=1$ のとき 共有点 0個、

$-\frac{b-2}{a} = 0$ すなわち $b=2$ のとき 共有点 1個、

$-\frac{b-2}{a} < 0$ すなわち $b=3, 4, 5, 6$ のとき 共有点 2個 である。

ゆえに、 $b=1$ すなわち 共有点の個数が 0個である確率は $\frac{1}{36}$

$b=2$ すなわち 共有点の個数が 1個である確率は $\frac{1}{36}$

$b=3, 4, 5, 6$ すなわち 共有点の個数が 2個である確率は $\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

(2) (1) から 共有点の個数の期待値は

$$0 \cdot \frac{1}{6} + 1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{2}{3} = \frac{3}{2}$$

(3) (1) から グラフ C と x 軸が 共有点をもつのは $b=2, 3, 4, 5, 6 \dots \dots \textcircled{1}$

ここで、 $\textcircled{1}$ の条件のもと、方程式 $x^2 - \frac{b-2}{a} = 0$ を解くと $x = \pm \sqrt{\frac{b-2}{a}}$

$\sqrt{\frac{b-2}{a}}$ が整数となるとき、 $-\sqrt{\frac{b-2}{a}}$ も整数となる。

よって、 $\sqrt{\frac{b-2}{a}}$ が整数となるような a, b は

$(a, b) = (1, 2), (1, 3), (1, 6), (2, 2), (2, 4), (3, 2)$
 $(3, 5), (4, 2), (4, 6), (5, 2), (6, 2)$

の 11通り。

ゆえに、求める確率は $\frac{11}{36}$