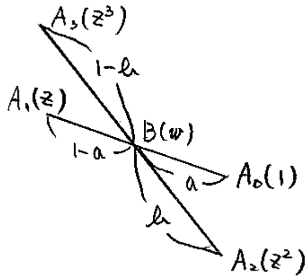
数学Ⅱ・B　第4問



(1) 点Bは線分 A_0A_1 を $a:(1-a)$ に内分するから

$$w = az + 1 - a \qquad (0<a<1)$$

また，点Bは線分 A_2A_3 を $b:(1-b)$ に内分するから

$$w = bz^3 + (1-b)z^2 \qquad (0<b<1)$$

ゆえに　$bz^3+(1-b)z^2 = az+1-a$　　すなわち　$(z-{}^{ア}1)({}^{イ}bz^2+z+1-{}^{ウ}a)=0$

$y\neq 0$ より，z は実数ではないから　$bz^2+z+1-a=0$ ……①

ここで，係数 b, 1, $1-a$ はすべて実数であるから，①の解の1つが虚数 z であるとき，
もう1つの解は $\bar{z}$ である。

よって，解と係数の関係より　$z+\bar{z} = -\dfrac{1}{{}^{エ}b}$，$z\bar{z} = \dfrac{1-{}^{オ}a}{{}^{カ}b}$

また，$z+\bar{z}=2x$，$z\bar{z}=x^2+y^2$ であるから　$2x=-\dfrac{1}{b}$ ……②，　$x^2+y^2=\dfrac{1-a}{b}$ ……③

$x=0$ のとき　$z=yi$，$z^2=-y^2$，$z^3=-y^3i$　であるから，
線分 A_0A_1 は第1(または第4)象限のみにしか存在せず，
線分 A_2A_3 は第3(または第2)象限のみにしか存在しないから，端点以外の点で交わることはない。

よって　$x\neq 0$　　このとき，②から　$b=-\dfrac{1}{{}^{キ}2x}$

③に代入すると　$1-a=-\dfrac{x^2+y^2}{2x}$　　すなわち　$a={}^{ク}1+\dfrac{x^{{}^{ケ}2}+y^{{}^{コ}2}}{{}^{サ}2x}$

ゆえに，求める条件は　$0<b<1$　より　$0<-\dfrac{1}{2x}<1$

よって，$2x<0$ であるから，分母を払うと　$0>-1>2x$　　ゆえに　$x<\dfrac{{}^{シス}-1}{{}^{セ}2}$

また，$0<a<1$ より　$0<1+\dfrac{x^2+y^2}{2x}<1$　　すなわち　$-1<\dfrac{x^2+y^2}{2x}<0$

$2x<0$ であるから，分母を払うと　$-2x>x^2+y^2>0$

ゆえに　$x^2+y^2+2x<0$　　すなわち　$(x+{}^{ソ}1)^2+y^2<{}^{タ}1$

(2) 4点 A_0, A_1, A_2, A_3 を表す複素数 1, z, z^2, z^3 に複素数 z をかけると，それぞれ z, z^2, z^3, z^4 となり，これらは4点 A_1, A_2, A_3, A_4 を表す。

また，複素数平面上のある点を表す複素数に複素数 z をかけたものが表す点は，もとの点を原点を中心に $|z|$ 倍に拡大(または縮小)し，$\arg z$ だけ回転移動したものである。

よって，4点 A_0, A_1, A_2, A_3 が A_1, A_2, A_3, A_4 に移動しても，線分 A_0A_1 と A_2A_3 が両端以外の点で交わるならば，線分 A_1A_2 と A_3A_4 は両端以外の点で交わる。ゆえに　${}^{チ}0$