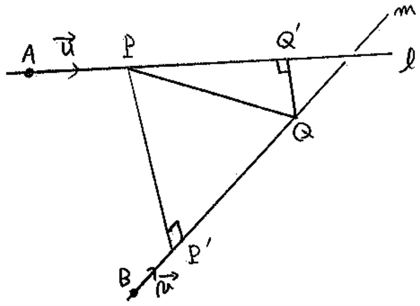
数学Ⅱ・B 第3問



(1) A, P, Q' は l 上の点，B, P', Q は m 上の点であるから，実数 t, t', s, s' により

$\overrightarrow{AP} = t\vec{u}$, $\overrightarrow{BP'} = t'\vec{v}$, $\overrightarrow{BQ} = s\vec{v}$, $\overrightarrow{AQ'} = s'\vec{u}$

と表される．

$\overrightarrow{AP} = t\vec{u} = (t, t, 0)$ であるから，点Pの座標は $P(t, t, 0)$

$\overrightarrow{BP'} = t'\vec{v} = (t', 0, t')$ であるから，点P'の座標は $P'(t', 5, t'-2)$

$\overrightarrow{BQ} = s\vec{v} = (s, 0, s)$ であるから，点Qの座標は $Q(s, 5, s-2)$

$\overrightarrow{AQ'} = s'\vec{u} = (s', s', 0)$ であるから，点Q'の座標は $Q'(s', s', 0)$

直線PP'と直線 m が直交するから $\overrightarrow{PP'} \cdot \vec{v} = 0$

ここで $\overrightarrow{PP'} = (t'-t, 5-t, t'-2)$，$\vec{v} = (1, 0, 1)$ であるから

$\overrightarrow{PP'} \cdot \vec{v} = (t'-t) \cdot 1 + (5-t) \cdot 0 + (t'-2) \cdot 1 = 0$

よって $t' = {}^{ア}1 + \dfrac{{}^{イ}1}{{}^{ウ}2} t$ ……Ⓐ

このとき $\overrightarrow{PP'} = \left(1+\frac{1}{2}t - t,\ 5-t,\ 1+\frac{1}{2}t-2\right) = \left({}^{エ}1 - \dfrac{{}^{オ}1}{{}^{カ}2}t,\ {}^{キ}5 - t,\ {}^{クケ}-1 + \dfrac{{}^{コ}1}{{}^{サ}2}t\right)$

同様に，直線QQ'と直線 l が直交するから $\overrightarrow{QQ'} \cdot \vec{u} = 0$

ここで $\overrightarrow{QQ'} = (s'-s, s'-5, -s+2)$，$\vec{u} = (1, 1, 0)$ であるから

$\overrightarrow{QQ'} \cdot \vec{u} = (s'-s) \cdot 1 + (s'-5) \cdot 1 + (-s+2) \cdot 0 = 0$

よって $s' = \dfrac{5}{2} + \dfrac{1}{2}s$ ……Ⓑ

このとき $\overrightarrow{QQ'} = \left(\frac{5}{2} + \frac{1}{2}s - s,\ \frac{5}{2} + \frac{1}{2}s - 5,\ -s+2\right) = \left(\dfrac{{}^{シ}5}{{}^{ス}2} - \dfrac{{}^{セ}1}{{}^{ソ}2}s,\ \dfrac{{}^{タチ}-5}{{}^{ツ}2} + \dfrac{{}^{テ}1}{{}^{ト}2}s,\ {}^{ナ}2 - s\right)$

(2) 三平方の定理より，$PP'^2 + QP'^2 = PQ^2$，$QQ'^2 + PQ'^2 = PQ^2$ であるから

$PP'^2 + QP'^2 = QQ'^2 + PQ'^2$

よって，$PP' = QQ'$ であるための条件は $QP' = PQ'$ である．

このとき $|\overrightarrow{PQ'}| = |\overrightarrow{QP'}|$

$\overrightarrow{PQ'} = (s'-t)\vec{u}$，$\overrightarrow{QP'} = (t'-s)\vec{v}$ で，

$|\vec{u}| = |\vec{v}| = \sqrt{2}$ であるから，$|\overrightarrow{PQ'}| = |\overrightarrow{QP'}|$ のとき $|s'-t| = |t'-s|$

Ⓐ, Ⓑ を代入すると $\left|\frac{5}{2} + \frac{1}{2}s - t\right| = \left|1 + \frac{1}{2}t - s\right|$

よって $\frac{5}{2} + \frac{1}{2}s - t = -\left(1 + \frac{1}{2}t - s\right)$ または $\frac{5}{2} + \frac{1}{2}s - t = 1 + \frac{1}{2}t - s$

ゆえに $s = {}^{ニ}7 - t$ ……① または $s = {}^{ヌネ}-1 + t$ ……②

(3) $s=7-t$ のとき $\overrightarrow{PP'}=\left(1-\frac{1}{2}t,\ 5-t,\ -1+\frac{1}{2}t\right)$,

$$\overrightarrow{QQ'}=\left(\frac{5}{2}-\frac{1}{2}(7-t),\ -\frac{5}{2}+\frac{1}{2}(7-t),\ 2-(7-t)\right)$$

$$=\left(-1+\frac{1}{2}t,\ 1-\frac{1}{2}t,\ -5+t\right)$$

$\overrightarrow{PP'}\cdot\overrightarrow{QQ'}=0$ より $\left(1-\frac{1}{2}t\right)\left(-1+\frac{1}{2}t\right)+(5-t)\left(1-\frac{1}{2}t\right)+\left(-1+\frac{1}{2}t\right)(-5+t)=0$

よって $-\frac{1}{4}t^2+t-1+\frac{1}{2}t^2-\frac{7}{2}t+5+\frac{1}{2}t^2-\frac{7}{2}t+5=0$

ゆえに $t^2-8t+12=0$ すなわち $(t-2)(t-6)=0$

よって $t={}^{ヒ}2,\ {}^{ハ}6$ (または $t={}^{ヒ}6,\ {}^{ハ}2$)