数学I・A　第2問[1]

(1) AをBで割ると

$$\begin{array}{r}
x+m+2 \\
x^2-2x-1\,\big)\,\overline{x^3+mx^2+nx+2m+n+1} \\
\underline{x^3-2x^2-x} \\
(m+2)x^2+(n+1)x+2m+n+1 \\
\underline{(m+2)x^2-2(m+2)x-m-2} \\
(2m+n+5)x+3m+n+3
\end{array}$$

よって　$Q=x+(m+{}^{ア}2)$, $R=(2m+n+{}^{イ}5)x+(3m+n+{}^{ウ}3)$

$x=1+\sqrt{2}$ のとき　$x-1=\sqrt{2}$

両辺を平方して，整理すると　$x^2-2x-1=0$

ゆえに　Bの値は ${}^{エ}0$

$A=BQ+R$ であるから，$x=1+\sqrt{2}$ のとき

$$-1=0\cdot\{(1+\sqrt{2})+(m+2)\}+(2m+n+5)(1+\sqrt{2})+(3m+n+3)$$

整理すると　$(5m+2n+9)+(2m+n+5)\sqrt{2}=0$

m, nはともに整数であるから

$5m+2n+9=0$, $2m+n+5=0$

これを解くと　$m={}^{オ}1$, $n={}^{カキ}-7$

(2) xがどのような奇数であってもAの値が常に偶数であるとする。

このとき，$x=1$ のときのAの値は偶数である。

$x=1$をAに代入すると　$1^3+m\cdot1^2+n\cdot1+2m+n+1=3m+2n+2$

$$=2(m+n+1)+m$$

m, nはともに整数であるから，mが偶数であることが必要条件である。

逆に，mが偶数のときを考える。

$$\begin{aligned}
A&=x^3+mx^2+nx+2m+n+1\\
&=m(x^2+2)+n(x+1)+(x+1)(x^2-x+1)\\
&=(x+1)(x^2-x+n+1)+m(x^2+2)
\end{aligned}$$

xが奇数のとき，$x+1$は偶数であるから，mが偶数のとき，Aは偶数である。すなわち，十分条件である。

以上より，mが偶数であることが必要十分条件である。

よって　${}^{ク}③$