

数学Ⅰ・A 第1問〔1〕

$$(1) \quad y = -x^2 + (2a-5)x - 2a^2 + 5a + 3 = -\left(x - \frac{2a-5}{2}\right)^2 + \frac{-4a^2+37}{4}$$

よって、頂点の座標は $\left(\frac{2a-5}{2}, \frac{-4a^2+37}{4}\right)$

(2) x^2 の係数の符号が負であるから、グラフは上に凸な放物線である。
ゆえに、グラフと x 軸が異なる2点で交わるには、グラフの頂点の y 座標が正であればよいから $\frac{-4a^2+37}{4} > 0$

よって $a^2 < \frac{37}{4}$ ゆえに $\frac{\sqrt{37}}{2} < a < \frac{\sqrt{37}}{2}$

(3) $6^2 < 37 < 7^2$ であるから $6 < \sqrt{37} < 7$

よって $3 < \frac{\sqrt{37}}{2} < \frac{7}{2}$

したがって、①を満たす整数 a は $a = -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3 \dots$ ②

また、グラフと x 軸との2つの交点の x 座標は、2次方程式 $-x^2 + (2a-5)x - 2a^2 + 5a + 3 = 0$ の2つの解である。

2次方程式を解くと $x = \frac{2a-5 \pm \sqrt{-4a^2+37}}{2} \dots$ ③

この2つの解がともに整数となるには $-4a^2+37$ が平方数でなければならぬ。

②の中で $-4a^2+37$ が平方数となるのは $a=3, -3$ のときである。

$a=3$ を③に代入すると $x=0, 1$

$a=-3$ を③に代入すると $x=-5, -6$

よって、グラフと x 軸との2つの交点の x 座標がともに整数となるのは $a=3$ または $a=-3$ のときである。

また、 $a=-3$ のとき、交点の x 座標は -5 と -6 (または -6 と -5)