第4問

(1) $\sqrt{3}+i = 2(\cos 30^\circ + i\sin 30^\circ)$ であるから

$|z_0| = |\sqrt{3}+i||\cos\theta + i\sin\theta| = 2\cdot 1 = {}^{ア}2$

$\arg z_0 = \arg(\sqrt{3}+i) + \arg(\cos\theta + i\sin\theta) = {}^{イウ}30^\circ + \theta$

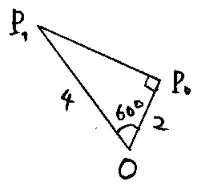
(2) $z_1 = \dfrac{4\{(1-\sin\theta) + i\cos\theta\}^2}{(1-\sin\theta)^2 + \cos^2\theta} = \dfrac{4\{-2\sin\theta(1-\sin\theta) + 2i\cos\theta(1-\sin\theta)\}}{2(1-\sin\theta)} = {}^{エ}4(-\sin\theta + i\cos\theta)$

よって $z_1 = 4\{\cos(90^\circ+\theta) + i\sin(90^\circ+\theta)\}$

ゆえに $|z_1| = {}^{オ}4$, $\arg z_1 = {}^{カキ}90^\circ + \theta$

(3) $\left|\dfrac{z_1}{z_0}\right| = \dfrac{|z_1|}{|z_0|} = \dfrac{4}{2} = {}^{ク}2$

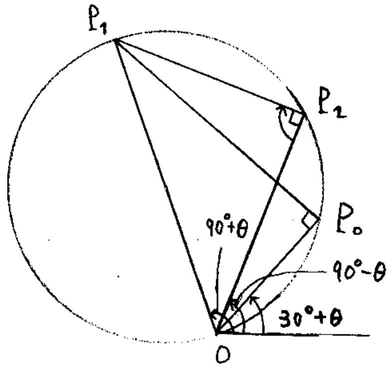
$\arg\dfrac{z_1}{z_0} = \arg z_1 - \arg z_0 = (90^\circ+\theta) - (30^\circ+\theta) = {}^{ケコ}60^\circ$



よって，$\triangle OP_0P_1$ は $\angle P_0 = 90^\circ$ の直角三角形である。 ゆえに $P_0P_1 = {}^{サ}2\sqrt{{}^{シ}3}$

(4) $\arg z_2 = \arg\dfrac{-2}{z_1} = \arg(-2) - \arg z_1$

$= 180^\circ - (90^\circ+\theta) = 90^\circ - \theta$



で，$0^\circ < \theta < 90^\circ$ であるから， P_0, P_2 は直線 OP_1 に関して同じ側にある。

O, P_0, P_1, P_2 は同一円周上にあるから，円周角の定理より

$\angle OP_2P_1 = \angle OP_0P_1 = 90^\circ$

$\arg\dfrac{z_1-z_2}{-z_2} = \arg\dfrac{z_1-z_2}{0-z_2}$ は， P_2O を基準に測った $\angle OP_2P_1$ であるから

右の図より $\arg\dfrac{z_1-z_2}{-z_2} = -{}^{スセ}90^\circ$

$\angle P_1OP_2 = \arg z_1 - \arg z_2 = (90^\circ+\theta) - (90^\circ-\theta) = 2\theta$ であるから

図より $\cos 2\theta = \dfrac{OP_2}{OP_1} = \dfrac{|z_2|}{|z_1|} = \dfrac{1}{|z_1|}\cdot\dfrac{2}{|z_1|} = \dfrac{1}{8}$

よって ${}^{ソ}8\cos 2\theta - {}^{タ}1 = 0$

このとき $8(1-2\sin^2\theta) - 1 = 0$ よって $\sin^2\theta = \dfrac{7}{16}$

$0^\circ < \theta < 90^\circ$ であるから $\sin\theta = \dfrac{\sqrt{{}^{チ}7}}{{}^{ツ}4}$