

数学 I・A 第2問 [1]

- (1) (a) A を B で割ったときの商が $x-1$ であるとき、余りは $ax+b$ とおける. (a, b は実数)

このとき、 $A = B(x-1) + ax+b$ と表される.

$$\text{すなわち } x^3 + px^2 + qx + r = (x^2 - 3x + 2)(x-1) + ax+b$$

これは x についての恒等式であり、両辺の x^2 の係数に着目すると

$$p = -4$$

- (b) 条件から、 A を B で割ったときの商を $x+c$ 、余りを dx とおける.
(c, d は実数)

このとき、 $A = B(x+c) + dx$ と表される.

$$\text{すなわち } x^3 + px^2 + qx + r = (x^2 - 3x + 2)(x+c) + dx$$

これは x についての恒等式であり、両辺の x^2 の係数、定数項に着目すると $p = c-3$, $r = 2c$

$$\text{これらから } c \text{ を消去すると } r = 2p + 6$$

- (c) 条件から、 A を B で割ったときの商を $x+e$ 、余りを $x+e$ とおける. (e は実数)

このとき、 $A = B(x+e) + x+e$ と表される.

$$\text{よって } A = (B+1)(x+e)$$

$$\text{すなわち } x^3 + px^2 + qx + r = (x^2 - 3x + 3)(x+e)$$

これは x についての恒等式であり、両辺の x の係数、定数項に着目すると $q = -3e+3$, $r = 3e$

$$\text{これらから } e \text{ を消去すると } q+r=3$$

$$\begin{aligned}
 (2) \quad (|a+b|+|a-b|)^2 &= |a+b|^2 + 2|a+b||a-b| + |a-b|^2 \\
 &= (a^2 + 2ab + b^2) + 2|a^2 - b^2| \\
 &\quad + (a^2 - 2ab + b^2) \\
 &= 2(a^2 + b^2 + |a^2 - b^2|) \quad \text{ゆえに } \textcircled{A}
 \end{aligned}$$

よって, $(|a+b|+|a-b|)^2 = 4a^2$ が成り立つとき

$$2(a^2 + b^2 + |a^2 - b^2|) = 4a^2$$

整理すると $|a^2 - b^2| = a^2 - b^2 \dots\dots \textcircled{1}$

絶対値の性質 ($A \geq 0$ のとき $|A| = A$, $A < 0$ のとき $|A| = -A$)

により, 等式 $\textcircled{1}$ が成り立つための必要+分条件は

$$a^2 - b^2 \geq 0 \quad \text{すなわち} \quad a^2 \geq b^2 \quad \text{ゆえに } \textcircled{C}$$

$a^2 \geq b^2$ でない, すなわち $a^2 < b^2$ のとき

$$\begin{aligned}
 (|a+b|+|a-b|)^2 &= 2(a^2 + b^2 + |a^2 - b^2|) \\
 &= 2\{a^2 + b^2 - (a^2 - b^2)\} \\
 &= 4b^2 \dots\dots \textcircled{2} \quad \text{ゆえに } \textcircled{3}
 \end{aligned}$$

なお, この等式は $a^2 = b^2$ のときも成り立つ.

$\textcircled{2}$ で, $|a+b|+|a-b| \geq 0$ であるから, $b \geq 0$ のとき

$$\frac{1}{2}(|a+b|+|a-b|) = b$$

が成り立つ.

すなわち, この等式が成り立つ必要+分条件は

$$a^2 \leq b^2 \quad \text{かつ} \quad b \geq 0$$

よって $|a| \leq b \quad \text{ゆえに } \textcircled{E}$