発展　基底変換と基本変形

教科書の第 2 章 2 では，行列Aの左に正則行列を掛けることは，Aに行基本変形を施すことであり，行列Aの右に正則行列を掛けることは，Aに列基本変形を施すことであることを学んだ（教科書の第 2 章定理 2-2 参照）。したがって，教科書の定理 3-7 は，表現行列の基本変形という見方から，次のように解釈することができる。

- 線形写像 $f : V \longrightarrow W$ ついて，定義域Vの基底を変換することは，fの表現行列に列基本変形を施すことであり，終域Wの基底を変換することは，fの表現行列に行基本変形を施すことである。

このことを踏まえて，第 2 章で述べた簡約階段化（教科書の第 2 章定理 2-1）や，第 3 章で述べた行列の標準系（教科書の第 3 章定理 1-2）について，ベクトル空間と線形写像の概念を用いた，より高い立場から検討してみよう。

定理 1　行基本変形定理

(1)　Kの要素を成分にもつ，任意の $m\times n$ 行列Aは，適当な行基本変形によって，簡約階段形に変形できる。すなわち，QA が簡約階段形行列になるような，m 次正則行列Qが存在する。

(2)　しかも，そのような簡約階段形行列は，Aに対して，ただ 1 つに決まる。すなわち，m 次正則行列 Q，Q' によって $B=QA$ と $B'=Q'A$ が，どちらも簡約階段形行列ならば，$B=B'$ である。

証明　$V=K^n$，$W=K^m$ として，行列Aで決まる線形写像 $f_A : V \longrightarrow W$ を考える。Vの標準基底を $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots\cdots, \boldsymbol{e}_n\}$ とし，Wの標準基底を $\{\boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2, \cdots\cdots, \boldsymbol{\varepsilon}_n\}$ とする。このとき，行列Aの第 j 列ベクトルは $f(\boldsymbol{e}_j)$ である（教科書の 2 例 2 参照）。

(1)　$\{f(\boldsymbol{e}_1), f(\boldsymbol{e}_2), \cdots\cdots, f(\boldsymbol{e}_n)\}$ における主番号*) を

$$c_1,\ c_2,\ \cdots\cdots,\ c_r \quad (1\leqq c_1<c_2<\cdots\cdots<c_r\leqq n)$$

とする。このとき

$$\{f(\boldsymbol{e}_{c_1}), f(\boldsymbol{e}_{c_2}), \cdots\cdots, f(\boldsymbol{e}_{c_r})\} \qquad (*)$$

は $f(V)$ の基底である（教科書の第 5 章定理 3-3）。

*）すなわち，$f(\boldsymbol{e}_1)$，$f(\boldsymbol{e}_2)$，……，$f(\boldsymbol{e}_{j-1})$ までが生成するWの部分空間の中に，$f(\boldsymbol{e}_j)$ が入らないときの番号 j である。

そこで，(＊)を延長して，Wの基底

$$\{f(\boldsymbol{e}_{c_1}),\ f(\boldsymbol{e}_{c_2}),\ \cdots\cdots,\ f(\boldsymbol{e}_{c_r}),\ \boldsymbol{w}_{r+1},\ \cdots\cdots,\ \boldsymbol{w}_m\} \quad (＊＊)$$

を作る（教科書の第 5 章定理 3-4)。

このとき，Vの標準基底を $\{\boldsymbol{e}_1,\ \boldsymbol{e}_2,\ \cdots\cdots,\ \boldsymbol{e}_n\}$ と Wの基底(＊＊)に関する f_A の表現行列Bは，簡約階段形になっている。実際，

(＊0)　$1 \leqq j < c_1$ について，$f(\boldsymbol{e}_j) = \boldsymbol{0}$ であるから，Bの第 j 列目は $\boldsymbol{0}$ ベクトルである。

(＊1)　Bの c_1 列目は，基本ベクトル $\varepsilon_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$ に等しい。また，

$c_1 < j < c_2$ について，$f(\boldsymbol{e}_j)$ は $\{f(\boldsymbol{e}_{c_1})\}$ で生成される部分空間に入る。すなわち，$f(\boldsymbol{e}_{c_1})$ のスカラー倍なので，Bの第 j 列目は，一番上の成分を除いて 0 になっている。

(＊2)　Bの c_2 列目は，基本ベクトル $\varepsilon_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$ に等しい。また，

$c_2 < j < c_3$ について，$f(\boldsymbol{e}_j)$ は $\{f(\boldsymbol{e}_{c_1}),\ f(\boldsymbol{e}_{c_2})\}$ で生成される部分空間に入る。すなわち，$f(\boldsymbol{e}_{c_1})$ と $f(\boldsymbol{e}_{c_2})$ の 1 次結合で書けるので，Bの第 j 列目は，上の 2 つの成分を除いて 0 になっている。

……

(＊r)　Bの c_r 列目は，基本ベクトル ε_r に等しい。また，$c_r < j \leqq n$ について，$f(\boldsymbol{e}_j)$ は $\{f(\boldsymbol{e}_{c_1}),\ f(\boldsymbol{e}_{c_2}),\ \cdots\cdots,\ f(\boldsymbol{e}_{c_r})\}$ で生成される部分空間に入る。すなわち，$f(\boldsymbol{e}_{c_1}),\ f(\boldsymbol{e}_{c_2}),\ \cdots\cdots,\ f(\boldsymbol{e}_{c_r})$ の 1 次結合で書けるので，Bの第 j 列目は，上の r 個の成分を除いて 0 になっている。

というわけで，Vの標準基底を $\{\boldsymbol{e}_1,\ \boldsymbol{e}_2,\ \cdots\cdots,\ \boldsymbol{e}_n\}$ と Wの基底(＊＊)に関する f_A の表現行列Bは，簡約階段形の行列になっている(図 2)。

$$
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccccccccccc}
c_1 & & & & c_2 & & & & c_3 & & c_r & & & \\
\vdots & & & & \vdots & & & & \vdots & \cdots & \vdots & & &
\end{array}\\
\left[\begin{array}{cccccccccccccc}
1 & a_{1c_1+1} & \cdots & a_{1c_2-1} & 0 & a_{1c_2+1} & \cdots & a_{1c_3-1} & 0 & \cdots\cdots & 0 & a_{1c_r+1} & \cdots & a_{1n} \\
 & & & & 1 & a_{2c_2+1} & \cdots & a_{2c_3-1} & 0 & \cdots\cdots & 0 & a_{2c_r+1} & \cdots & a_{2n} \\
 & & & & & & & & 1 & \cdots\cdots & 0 & a_{3c_r+1} & \cdots & a_{3n} \\
 & & & & & & & & & \ddots & & & & \\
 & & & & & & & & & & 1 & a_{rc_r+1} & \cdots & a_{rn} \\
 & & & & 0 & & & & & & & & &
\end{array}\right]
\end{array}
$$

図 2　簡約階段形

以上より，Wの基底 $(**)$ から標準基底を $\{\boldsymbol{\varepsilon}_1,\ \boldsymbol{\varepsilon}_2,\ \cdots\cdots,\ \boldsymbol{\varepsilon}_n\}$ への変換行列をQとすると，$B=QA$ は簡約階段形の行列であることがわかり，(1)が証明された。

(2)　$B'=Q'Q^{-1}B$ なので，次が示されればよい：2つの $m\times n$ 簡約階段形の $m\times n$ 行列 $B,\ B'$ について，$B'=QB$ となる m 次正則行列 Q が存在するならば，$B=B'$ である。これを証明するために

$$B=[\ \boldsymbol{w}_1\quad \boldsymbol{w}_2\quad \cdots\quad \boldsymbol{w}_n\ ],\ B'=[\ Q\boldsymbol{w}_1\quad Q\boldsymbol{w}_2\quad \cdots\quad Q\boldsymbol{w}_n\ ]$$

とする。すなわち，行列Bの第 j 列目を $\boldsymbol{w}_j$ とおく。教科書の第 5 章補題 3-3 (1) より　$\boldsymbol{w}_1,\ \boldsymbol{w}_2,\ \cdots\cdots,\ \boldsymbol{w}_n$

についての主番号と　$Q\boldsymbol{w}_1,\ Q\boldsymbol{w}_2,\ \cdots\cdots,\ Q\boldsymbol{w}_n$

についての主番号は一致する。すなわち，簡約階段形行列 $B,\ B'$ の主番号（段が落ちる行番号）は一致する。そこで，これらの主番号を $c_1,\ c_2,\ \cdots\cdots,\ c_r$ としよう。Bも B' も簡約階段形なので，それらの主列ベクトルは，基本ベクトルに一致する。すなわち

$$\boldsymbol{w}_{c_k}=Q\boldsymbol{w}_{c_k}=\boldsymbol{\varepsilon}_k\quad (k=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ r)$$

また，$c_k<j<c_{k+1}$ ($k=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ r$，便宜的に $c_{r+1}=n$ とする) なる j について，$\boldsymbol{w}_j$ を $\boldsymbol{w}_{c_1},\ \boldsymbol{w}_{c_2},\ \cdots\cdots,\ \boldsymbol{w}_{c_k}$ の 1 次結合で

$$\boldsymbol{w}_j=a_{1j}\boldsymbol{w}_{c_1}+a_{2j}\boldsymbol{w}_{c_2}+\cdots\cdots+a_{kj}\boldsymbol{w}_{c_k}$$

と書かれるなら

$$Q\boldsymbol{w}_j=a_{1j}Q\boldsymbol{w}_{c_1}+a_{2j}Q\boldsymbol{w}_{c_2}+\cdots\cdots+a_{kj}Q\boldsymbol{w}_{c_k}$$

となる。すなわち，Bと B' の第 j 列目も一致する。

以上より，Bと B' のすべての列ベクトルが一致するので，$B=B'$ である。 ■

定理 2　行列の標準形

A を $m\times n$ 行列とし，$r=\mathrm{rank}\,A$ とする。このとき，m 次正則行列 Q と，n 次正則行列 P が存在して

$$Q^{-1}AP=\begin{bmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \text{\Large 0} \\ & & 1 & \\ & \text{\Large 0} & & \end{bmatrix}$$

ここで，この右辺の行列は r 個の $(i,\ i)$ 成分 $(i=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ r)$ だけが 1 であり，残りの成分はすべて 0 である。

証明　$V=K^n$，$W=K^m$ として，行列 A で決まる線形写像 $f_A: V\longrightarrow W$ を考える。定理 1 の証明と同様に，W の基底

$$\{f(\boldsymbol{e}_{c_1}),\ f(\boldsymbol{e}_{c_2}),\ \cdots\cdots,\ f(\boldsymbol{e}_{c_r}),\ \boldsymbol{w}_{r+1},\ \cdots\cdots,\ \boldsymbol{w}_m\}\quad (**)$$

を構成しておく。また，次元 $n-r$ の部分空間 $\mathrm{Ker}(f_A)$ の基底 $\{\boldsymbol{v}_{r+1},\ \boldsymbol{v}_{r+2},\ \cdots\cdots,\ \boldsymbol{v}_n\}$ を任意に選んでおく。このとき，V のベクトルの組

$$\{\boldsymbol{e}_{c_1},\ \boldsymbol{e}_{c_2},\ \cdots\cdots,\ \boldsymbol{e}_{c_r},\ \boldsymbol{v}_{r+1},\ \boldsymbol{v}_{r+2},\ \cdots\cdots,\ \boldsymbol{v}_n\}\qquad (\dagger)$$

は，V の基底である。

実際，$(\dagger)$ は 1 次独立である。1 次関係

$$a_1\boldsymbol{e}_{c_1}+a_2\boldsymbol{e}_{c_2}+\cdots\cdots+a_r\boldsymbol{e}_{c_r}+a_{r+1}\boldsymbol{v}_{r+1}+a_{r+2}\boldsymbol{v}_{r+2}+\cdots\cdots+a_n\boldsymbol{v}_n=\boldsymbol{0}$$

が成り立つとすると，まずこれを f_A で写して $(\boldsymbol{v}_i\in\mathrm{Ker}(f_A)$ に注意して$)$

$$a_1f(\boldsymbol{e}_{c_1})+a_2f(\boldsymbol{e}_{c_2})+\cdots\cdots+a_rf(\boldsymbol{e}_{c_r})=\boldsymbol{0}$$

となるが，$\{f(\boldsymbol{e}_{c_1}),\ f(\boldsymbol{e}_{c_2}),\ \cdots\cdots,\ f(\boldsymbol{e}_{c_r})\}$ は 1 次独立なので，$a_1=a_2=\cdots\cdots=a_r=0$ となる。これより

$$a_{r+1}\boldsymbol{v}_{r+1}+a_{r+2}\boldsymbol{v}_{r+2}+\cdots\cdots+a_n\boldsymbol{v}_n=\boldsymbol{0}$$

となるが，$\{\boldsymbol{v}_{r+1},\ \boldsymbol{v}_{r+2},\ \cdots\cdots,\ \boldsymbol{v}_n\}$ が 1 次独立なので，$a_{r+1}=a_{r+2}=\cdots\cdots=a_n=0$ である。以上より，$(\dagger)$ は 1 次独立である。

また，(†)はVを生成する。実際，任意の $\boldsymbol{v} \in V$ について，
$f_A(\boldsymbol{v})=a_1 f(\boldsymbol{e}_{c_1})+a_2 f(\boldsymbol{e}_{c_2})+\cdots\cdots+a_r f(\boldsymbol{e}_{c_r})$ と書けるが，ここで
$\boldsymbol{v}-(a_1\boldsymbol{e}_{c_1}+a_2\boldsymbol{e}_{c_2}+\cdots\cdots+a_r\boldsymbol{e}_{c_r})$ というベクトルを考えると，これは f_A で写して $\mathbf{0}$ になるので，$\mathrm{Ker}(f_A)$ の要素であり，よって

$$v-(a_1\boldsymbol{e}_{c_1}+a_2\boldsymbol{e}_{c_2}+\cdots\cdots+a_r\boldsymbol{e}_{c_r})=b_{r+1}\boldsymbol{v}_{r+1}+b_{r+2}\boldsymbol{v}_{r+2}+\cdots\cdots+b_n\boldsymbol{v}_n$$

と書ける。これより，$\boldsymbol{v}$ は(†)の1次結合で書けることになり，(†)はVを生成することがわかる。

そこで，線形写像 f_A の，Vの基底(†)と，Wの基底(＊＊)に関する表現行列を考えると，その行列の最初の第 j 列 ($j=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ r$) は基本ベクトル $\boldsymbol{\varepsilon}_j$ であるが，それ以外の成分はすべて 0 である。すなわち，題意の等式の右辺の行列の形になっている。 ■

研究　線形写像の行列の積による表示の意味

$m\times n$ 行列 $A=[a_{ij}]$ で決まる線形写像 $f_A: K^n \longrightarrow K^m$ は，K^n のベクトル (n 次の列ベクトル) $\boldsymbol{v}={}^t[\,a_1\quad a_2\quad \cdots\quad a_n\,]$ を，K^m のベクトル (m 次の列ベクトル) $\boldsymbol{w}={}^t[\,b_1\quad b_2\quad \cdots\quad b_m\,]=A\boldsymbol{v}$ に写す。これは，行列の積の形に書くと，
$\boldsymbol{w}=A\boldsymbol{v}$，すなわち

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \qquad (＊)$$

ということである。

式(＊)の左辺は $m\times 1$ 行列であり，右辺は $m\times n$ 行列と $n\times 1$ 行列の積である。これを，通常は，$\boldsymbol{v}$ という「ベクトル」を行列Aに掛け合わせて $\boldsymbol{w}$ というベクトルを得る，と解釈するが，以下のように考えれば，ベクトルと行列という2種類の概念を用いることなく，行列と線形写像だけの言葉で統一的に解釈することができる。

まず，一般にベクトル空間Vのベクトル $\boldsymbol{v}$ を与えることは，線形写像 $K \longrightarrow V$ を与えることと (1$\in K$ の写る先を考えることで) 同等であったことを思い出そう (教科書の[2] 例1)。そして，$K \longrightarrow K^n$ という形の線形写像は，Kの基底 $\{1\}$ と K^n の標準基底に関して，$n\times 1$ 行列で表現できる。これが，K^n のベクトル $\boldsymbol{v}$ を，列ベクトルを用いて表すということの意味である。

$\boldsymbol{v}$ を与える線形写像 $K \longrightarrow K^n$ と f_A を合成すると，$\boldsymbol{w}=f_A(\boldsymbol{v})$ を与える線形写像 $K \longrightarrow K^m$ が得られる。よって，$\boldsymbol{w}$ をこの線形写像の，K の基底 $\{1\}$ と K^m の標準基底に関する表現行列である，$m\times1$ 行列
$\boldsymbol{w}={}^t[\,b_1 \quad b_2 \quad \cdots \quad b_m\,]=A\boldsymbol{v}$ で表現するならば，それは (教科書の定理 3-2 より)，A と $\boldsymbol{v}$ の表現行列 $\boldsymbol{v}={}^t[\,a_1 \quad a_2 \quad \cdots \quad a_n\,]$ の積に等しくなる。これが，行列の等式 ($*$) の意味であり，それが線形写像 $f_A : K^n \longrightarrow K^m$ の表現行列による表示の意味である。